Lösungen zu Übungsblatt 8
Modul Algebra-2, SoSe 2006

---

(22) Sei U' ein von $\mathbb{Z}$ verschiedener Unterring von $\mathbb{Q}$. Ferner sei

$$N := \left\{ \prod_{p\in\mathcal{P}}{}' p^k : k \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei $\mathcal{P} = \left\{ p \in U' : p \text{ prim}, \frac{1}{p} \in U' \right\}$. N ist multiplikatives Untermonoid von $\mathbb{N}^+$. Sei nun

$$U := \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in N \right\}.$$

Wir zeigen nun: $U = U'$.

(i) $U \subseteq U'$: Mit $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{P}$ ist $\frac{1}{\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}} \in U'$ für alle $\alpha_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, r\}$ und somit $\frac{1}{n} \in U'$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt damit $U \subseteq U'$.

(ii) $U' \subseteq U$: Sei $\frac{z}{m} \in U'$ ein vollständig gekürzter Bruch und p ein Primteiler von m, also $p \mid m$ und somit $m = p \cdot m''$ für ein $m'' \in \mathbb{N}^+$. Da $ggT(z,m) = 1$ ist, existieren $z', m' \in \mathbb{Z}$ so dass $zz' + mm' = 1$. Damit gilt aber auch $\frac{z}{m}z' + m' = \frac{1}{m}$, und da $\frac{z}{m}z' + m' \in U'$ ist auch $\frac{1}{m} \in U'$. Weil $m = p \cdot m''$ ist folgt, dass $\frac{1}{p} = m''\frac{1}{m}$ und somit $\frac{1}{p} \in U$, also $p \in \mathcal{P}$. Da sich m darstellen lässt als

$$m = \prod_{p_i\in\mathcal{P}}{}' p_i^{\alpha_i}$$

mit geeigneten $\alpha_i \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{z}{m} \in U$. $\square$

(23) Seien o.E. $a', b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$, also $v_p(ab') = v_p(a'b)$. Damit gilt aber auch $v_p(a) + b_p(b') = v_p(a') + v_p(b)$ und somit $v_p(a) - v_p(b) = v_p(a') - v_p(b')$, also insbesondere $\left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a)-v_p(b)} = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a')-v_p(b')}$.

(b) (i) Da $p > 0$ ist $\left(\frac{1}{p}\right)^r > 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

(ii) $$\left|\frac{a}{b}\frac{a'}{b'}\right|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(aa')-v_p(bb')} = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a)-v_p(b)+v_p(a')-v_p(b')}$$
$$= \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a)-v_p(b)} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a')-v_p(b')} = \left|\frac{a}{b}\right|_p \cdot \left|\frac{a'}{b'}\right|_p.$$

(iii) (enthält (iv)): Ich berechne zunächst:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right|_p = \left|\frac{ab'+a'b}{bb'}\right|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(ab'+a'b)-v_p(bb')}$$

Da $v_p(ab'+a'b) \geq \min\{v_p(ab'), v_p(a'b)\} = \min\{v_p(a)+v_p(b'), v_p(a')+v_p(b)\}$ und somit $v_p(ab'+a'b) - v_p(bb') \geq \min\{v_p(a)+v_p(b')-v_p(b)-v_p(b'), v_p(a')+v_p(b)-v_p(b)-v_p(b')\} = \min\{v_p(a)-v_p(b), v_p(a')-v_p(b')\}$ folgt unmittelbar, dass

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(ab'+a'b)-v_p(bb')} \leq \max\left\{\left|\frac{a}{b}\right|_p, \left|\frac{a'}{b'}\right|_p\right\}.$$

(c) Wähle $q_k := \dfrac{p^k}{1}$. Dann gilt: $\left|\dfrac{p^k}{1}\right|_p = \left(\dfrac{1}{p}\right)^k \to_{k\to\infty} 0$. □

(24) Sei $\mathcal{A} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ analytisch }\}$. Wir sollen zeigen, dass $\mathcal{H} = \{r\mathcal{A} : r \in \mathcal{A}\}$ nicht Noether'sch ist, also suchen wir eine aufsteigende Kette von Hauptidealen, die nicht konstant wird. Man betrachte die Hauptideale $f_k\mathcal{A}$ mit

$$f_k := \sin(\pi x/2^k).$$

Die Nullstellen $\mathcal{N}_{f_k}$ der Funktionen f_k sind jeweils alle $x \in 2^k\mathbb{Z}$. Daher gilt:

$$\ldots \mathcal{N}_{f_{k+1}} \subsetneqq \mathcal{N}_{f_k} \subsetneqq \mathcal{N}_{f_{k-1}} \ldots.$$

Wir wissen, dass aus $f \mid g$ folgt, dass $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{N}_g$ ist, da $f \mid g$ impliziert, dass $g = fh$ mit einem geeigneten $h \in \mathcal{A}$ ist. Ausserdem wissen wir, dass aus $f \mid g$ folgt, dass $g\mathcal{A} \subseteq f\mathcal{A}$ ist. Doch kann man von $\mathcal{N}_{f_k} \subset \mathcal{N}_{f_{k-1}}$ auch auf $f_k \mid f_{k-1}$ schließen? Im allgemeinen Fall geht dies nicht, hier jedoch schon. Die Nullstellen der reellen Sinusfunktion sind alle einfach, daher gilt insbesondere $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mu_\alpha(f_k) \leq \mu_\alpha(f_{k-1})$, womit $f_k \mid f_{k-1}$ gilt und somit auch $f_{k-1}\mathcal{A} \subset f_k\mathcal{A}$, wobei immer $f_{k-1}\mathcal{A} \neq f_k\mathcal{A}$ ist, da f_{k-1} mehr Nullstellen als f_k hat, also niemals $f_{k-1} \mid f_k$ gelten kann. Wir erhalten somit die Kette

$$\ldots f_{k-1}\mathcal{A} \subsetneqq f_k\mathcal{A} \subsetneqq f_{k+1}\mathcal{A} \subsetneqq \ldots,$$

welche nie konstant wird. Daher ist $\mathcal{H}$ nicht Noether'sch. □