Modul Algebra 2 16. April 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 1

(1) Seien $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, ..., n\}$, S die Gruppe der Permutationen der Menge M und $\mathcal{L}$ die Menge der geordneten Listen paarweise verschiedener Elemente aus der Menge M. [ ] bezeichnet die leere Liste. Beispiele von weiteren Elementen aus $\mathcal{L}$ sind etwa für $n = 7$: $[1], [4, 3, 1, 7]$. Eine Permutation $\sigma \in S$ werde wie folgt auf ein Element $w = [i_1, ..., i_r] \in \mathcal{L}$ angewendet:

$$\sigma(w) := [\sigma(i_1), ..., \sigma(i_r)] \ .$$

Mit w ist auch $\sigma(w)$ aus $\mathcal{L}$.
Auf $\mathcal{L}$ werde nun noch wie folgt ein Produkt erklärt:

$$w \cdot v := \text{ Liste, die durch Hintereinanderschreiben von } v \text{ nach } w$$

und Streichen der Wiederholungen von links nach rechts entsteht.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{L}$ ist ein Monoid.
(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathcal{L}$.
(c) Sei H eine Untergruppe von S. Ist $\mathcal{U}_H = \{w \in \mathcal{L} \colon \sigma(w) = w \text{ für alle } \sigma \in H\}$ ein Untermononoid von $\mathcal{L}$?

(2) **Matrizen mit zirkulärer Symmetrie.**
Seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$ und $R := \{P \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3} \ : \ PA = AP\}$.
(a) R ist ein Unterring von $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$.
(b) Bestimmen Sie R und die Gruppe G der Einheiten in R.

(3) **„Kinder-Sudoku“.** Sei A eine Menge mit 4 Elementen, z.B. $\{0, 1, 2, 3\}$. Ein Schema oder eine Matrix

$$S := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s_{13} & s_{14} \\ s_{23} & s_{24} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

aus $A^{4\times 4}$ ist ein Sudoku, wenn die zu den bekannten Bedingungen für 9x9-Sudokus analogen Bedingungen gelten: in jedem 2x2-Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte kommen die Elemente aus A jeweils genau einmal vor.
Beweisen Sie, dass es genau 288 solcher Sudokus gibt.