Modul Algebra 2 25. Juni 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 11

(31) **(a)** Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ gegeben als$f = x^3 + px + q$. Zeigen Sie: $f(a) = 0$, wenn

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

und die Wurzeln der auftretenden u. U. komplexen Zahlen vorher fixiert wurden.

(b) [1] Finden Sie eine Bedingung, unter der sich für vorgegebene $a, b \in \mathbb{N}$ der Ausdruck

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

zu $\sqrt{c}$ mit geeignetem $c \in \mathbb{N}$ vereinfachen lässt und wie sich in diesem Fall c aus a, b berechnet. b sei dabei kein volles Quadrat. Ist die von Ihnen gefundene Bedingung auch hinreichend? Untersuchen Sie dieselbe Frage für Ausdrücke

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}}\ .$$

(32) Seien L eine Körpererweiterung von K und $\alpha \in L$. Seien weiter $G = \mathsf{Aut}_K(L)$ und $B(\alpha) := \{\beta \in L : \exists\ \sigma \in G : \sigma(\alpha) = \beta\}$ die Bahn von α unter G. Bei Bedarf sei $\mathsf{Char}(K) = 0$. Zeigen Sie:

(a) α algebraisch über $K \Rightarrow |B(\alpha)| < \infty$ (Interessiert Sie auch die Umkehrung??)

(b) $|B(\alpha)| \leq [L : K]$, wenn $[L : K]$ endlich.

(c) Wenn α algebraisch ist über K, dann ist

$$f := \prod_{\beta \in B(\alpha)} (x - \beta) \in K''[x] \text{ und } f \text{ ist das Minimalpolynom von } \alpha \text{ über } K''.$$

Anleitung zu (b): Setzen Sie die Automorphismen σ aus G fort zu einem Ringautomorphismus des Polynomrings $L[x]$ durch koeffizientenweise Anwendung.
Durch die Automorphismen in G werden alle Elemente in $B(\alpha)$ bewegt.

(33) In $\mathbb{Q}[x, y, z]$ seien $f_1 = x^2 - 2, f_2 = y^2 - 3$ und $f_3 = x + y - z$. Sei $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle_{\mathbb{Q}[x,y,z]}$ das von f_1, f_2, f_3 in $\mathbb{Q}[x, y, z]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie:

$$I \cap \mathbb{Q}[z] = g\,\mathbb{Q}[z] \text{ mit } g = \mathsf{MiPo}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})\ .$$

.....

[1] Aufgabe 26 zum Kurs "Einführung in das symbolische Rechnen", Wintersemester 2004/05, Graebe, Leipzig.