Aufgabenblatt 12

(34) [1] Seien $\alpha, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)} \in \mathbb{N}^n, R = K[x_1, \ldots, x_n], I = \langle x^{\alpha^{(1)}}, \ldots, x^{\alpha^{(r)}} \rangle_R$ und sei $I_\alpha = \{f \in R : \ fx^\alpha \in I\}$. Zeigen Sie:

$$I_\alpha = \langle \ \frac{x^{\alpha^{(1)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(1)}}, \ x^\alpha)} \ , \ \ldots \ , \ \frac{x^{\alpha^{(r)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(r)}}, \ x^\alpha)} \ \rangle_R \quad .$$

(35) [2] Sei K ein Körper und $R = K[x, y], S = K[x, y, z]$.

(a) Bestimmen Sie ein minimales Erzeugendensystem für das Ideal

$$I = \langle \ \{x^k y^l : \ kl^2 \geq 24\} \ \rangle_R \ .$$

(b) Seien $f_1 = x^4y^2 - z, f_2 = x^3y^3 - 1, f_3 = x^2y^4 - 2z$ aus S und $F = [f_1, f_2, f_3]$. Finden Sie zwei Polynome $g_1, g_2 \in \langle f_1, f_2, f_3 \rangle_S$ mit mehr als zwei Termen, die sich nicht nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, und für die außerdem bezüglich $\leq_{grlex}$ mit $x > y > z$ und mit dem Divisionsalgorithmus der Vorlesung gilt

$$\overline{g_1}^F \neq 0 \quad \text{und} \quad \overline{g_2}^F \neq 0$$

(36) **(a)** Seien K ein Körper, L eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung von K, $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1, \ldots, f_s \in R$, $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_R$ und schließlich

$$\mathscr{V} = \{v \in L^n : \ f_i(v) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq s\} \ .$$

Zeigen Sie:

$$\left[\ I \neq R \text{ und } I \cap K[x_j] \neq \{0\} \text{ für } 1 \leq j \leq n \ \right] \quad \Longrightarrow \quad |\mathscr{V}| < \infty$$

(b) Sei $R = \mathbb{Q}[x]$ und $\mathscr{V}(I) = \{a \in \mathbb{C} : \ f(a) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$. Geben Sie eine notwendige Bedingung für die Ideale I, J in R an dafür, dass gilt:

$$\mathscr{V}(I) \ = \ \mathscr{V}(J) \quad \Longrightarrow \quad I = J$$

(37) (3 Bonuspunkte) [3] Seien $f = xy^2 - z^2$ und $\mathscr{V} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \ f(v) = 0\}$ die Menge der reellen Nullstellen von f. $\mathscr{V}$ ist der so genannte Whitney-sche Regenschirm.

Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(2, 2, 0)$ von $\mathscr{V}$ im $\mathbb{R}^3$.

---

[1] Exercise 15.3, Seite 365 in dem Buch „Commutative algebra with a view towards algebraic geometry“ von David Eisenbud, Springer Verlag, 1995.

[2] Abgewandelt aus einer Vorlesung zum computergestützten symbolischen Rechnen für Studierende der Informatik in München, 2001.

[3] Nach einer Aufgabe von van Straten e.a. zur Computeralgebra in Mainz, 2001.
Bevor Sie die Aufgabe lösen , empfiehlt es sich, Analysiskenntnisse zu aktivieren über lokale Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren, etwa an Hand von H. Heuser: Analysis 2.