Aufgabenblatt 13

(38) **(a)** Seien $R = K[x]$ Polynomring in einer Variablen über dem Körper K, $f_1, \ldots, f_s \in R \setminus \{0\}$, $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_R$ und $g = \mathsf{ggT}(f_1, \ldots, f_s)$. Zeigen Sie:

$\{g\}$ ist die einzige reduzierte Gröbnerbasis von I.

(b) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring in n Variablen über dem Körper K, $A \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit 1-en in der Diagonalen,

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

und $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_R$. Zeigen Sie:

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist bei geeigneter Anordnung der Variablen eine minimale $\leq_{\mathsf{lex}}$ - Gröbnerbasis für das Ideal I.

Wie muss A dann zusätzlich noch aussehen, damit eine reduzierte Gröbnerbasis entsteht ?

(39) Beweisen Sie Satz 9 (d) in § 20.

(40) [(1)] Gegeben sei $f = x^3 - yx^2 + y^2 - x^2 + xy^2 - x + y \in \mathbb{R}[x, y]$.

Bestimmen Sie alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, bei denen die durch f gegebene Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, die ebenfalls mit f bezeichnet sei, ein relatives Maximum oder Minimum haben könnte und entscheiden Sie ggf. welcher Art die gefundenen Punkte sind.

Alle Schritte, die Sie durchführen, sollen im Bezeichnungs- und Begriffskontext der Vorlesung verlaufen und mit entsprechenden Ergebnissen der Vorlesung begründet werden. Hilfsresultate aus der Theorie reeller Funktionen sollen benannt bzw. zitiert werden.

.....

[(1)] Ähnlich wie Exercise 5, §8, Ch. 2 im Buch „Ideals, Varieties and Algorithms“ von David Cox, John Little und Donald O'Shea, Springerverlag, 1992 (1. Auflage).