## Aufgabenblatt 14

(41/42) Sei R ein kommutativer Ring. Bei Bedarf sei  $R = K[x_1, \ldots, x_n]$  und L ein Erweiterungskörper von K. Zu einem Ideal I in R sei

$$\sqrt{I} = \{ f \in R : f^m \in I \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \}$$
.

- (a)  $\sqrt{I}$  ist ein Ideal und  $I \subseteq \sqrt{I}$ . [Betrachte u. A.  $(f+g)^{m+n-1}$ ].
- (b)  $\sqrt{\ }$  ist schwach monoton bezüglich  $\subseteq$  .
- (c)  $\mathscr{V}_L(\sqrt{I}) = \mathscr{V}_L(I)$
- (d)  $\exists m \in \mathbb{N}_+ : \forall f \in \sqrt{I} : f^m \in I$  $[\sqrt{I} = \langle g_1, \dots, g_s \rangle;$  zeige durch Induktion nach k, dass es ein  $m \in \mathbb{N}$ , gibt derart,

Ideale mit  $\sqrt{I} = I$  heißen Radikalideale.

dass für alle  $f \in \langle g_1, \dots, g_k \rangle_R$  gilt:  $f^m \in I$ ].

- (e)  $\sqrt{I}$  ist Radikalideal.
- (f) Primideale sind Radikalideale.
- (g) Der Durchschnitt von beliebig vielen Radikalidealen ist ein Radikalideal und für zwei Ideale I, J gilt  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ .
- (h) dim  $I = 0 \Leftrightarrow \dim \sqrt{I} = 0$ .
- (43) Gegeben seien  $f_1 = xy^2 z$ ,  $f_2 = yz^2 x$ ,  $f_3 = zx^2 y$  in  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  und  $F = [f_1, f_2, f_3]$ . Ist F eine Gröbnerbasis des Ideals  $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle_{\mathbb{Q}[x,y,z]}$  bezüglich der Monomordnung
  - (a)  $\leq_{\mathsf{grlex}}$ , wobei x > y > z?
  - (b)  $\leq_{\mathsf{lex}}$  wobei ebenfalls x > y > z?

Ihre Antwort ist mit den Ergebnissen aus der elementaren Theorie von Gröbnerbasen der Vorlesung zu begründen.

Der Vorlesungsstoff, insbesondere auch die zahlreichen Beispiele und die folgende Auswahl aus den Übungsaufgaben sind Grundlage für die Aufgaben in der bevorstehenden Klausur am 31. Juli 2007 von 9-11 (Zwei-Fächer-Bachelor) oder 9-12 (Fach-Bachelor) im großen Hörsaal Wechloy, W3-1-161:

(4) bis (13), (16) bis (20), (22), (23), (26), (28), (30), (32), (34) bis (36), (38) bis (40), (43), jeweils einschließlich.

Die Aufgaben (41/42) sind gut geeignet, um eine ganze Reihe von Grundbegriffen der Algebra zu wiederholen.

Weitere Informationen und Materialien finden Sie ggf. wie immer auf der Internetseite zu diesem Modul, die über meine Heimseite am IfM erreichbar ist. Dort werden nach und nach auch einige Musterlösungen zu Aufgaben erscheinen.