Modul Algebra 2 — 23. April 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 2

(4) **(a)** Zeigen Sie zum Beweis von Folgerung 6 in § 2 für eine Gruppe X und eine Untergruppe G von X:

$$\forall x \in X \ : \ |Gx| = |G| \ ,$$

und bestimmen Sie die Bahnen der Elemente von $X = S_3$ unter der Untergruppe $G = \{id, \tau\}$ mit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Führen Sie den zur Vervollständigung des Beweises von Satz 7(c) in §2 noch fehlenden Nachweis für die folgende Regel:

$$y \in G(x) \ \Rightarrow \ |G^x| = |G^y|$$

(5) Wir färben die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks mit den Farben rot, blau, und gelb.[1]

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Ecken zu färben, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch eine Drehung des Fünfecks ineinander übergeführt werden können?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Ecken zu färben, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch Drehungen und Spiegelungen des Fünfecks ineinander übergeführt werden können.

(6) Seien G eine Gruppe, X eine nicht leere Menge und $F = Abb(G, X)$. Wir betrachten die Abbildung

$$w : G \times F \longrightarrow F, \ (a, f) \mapsto f_{a^{-1}} \ .$$

Dabei ist $f_{a^{-1}} = f \circ \mu_{a^{-1}}$ und $\mu_{a^{-1}}$ wie beim Beweis des Satzes von Cayley erklärt:

$$\mu_{a^{-1}}(h) = a^{-1}h \text{ für } \ h \in G \ .$$

(a) Bestätigen Sie, dass w eine Operation von G auf F erklärt, die so genannte natürliche Operation von G auf $Abb(G, X)$.

Seien jetzt G und X endlich, $|G| = p, |X| = d$ mit einer Primzahl p.

(b) Bestimmen Sie $F^a = Fix_F(a)$ für $a = e$ und $a \neq e$. Dabei ist e das neutrale Element der multiplikativ geschriebenen Gruppe G.[2]

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des „Lemmas, das nicht von Burnside ist“ die Anzahl $|F/G|$ der Bahnen für die Operation von G auf F bezüglich w.[3]

---

[1] Übungsaufgabe 1. auf Seite 52 in dem Skript
`www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/FHS/SEM3/ws02/skriptum-einf.pdf`
Wenn es Sie mehr reizt, können Sie stattdessen auch die dortige Aufgabe 4 bearbeiten.
In jedem Fall ist die Lösung im Kontext unserer Vorlesung und nur mit den von uns bisher erreichten Bezeichnungen und Resultaten auszuarbeiten.

[2] Benutzen Sie $G = \{e, a^{-1}, \ldots, a^{-(p-1)}\}$ für alle $a \in G \setminus \{e\}$. Hierfür muss p eine Primzahl sein.

[3] Das Ergebnis impliziert nebenbei den so genannten kleinen Satz von Fermat.