Modul Algebra 2 30. April 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 3

(7) **(a)** Sei M ein multiplikativ geschriebenes Monoid und a ein invertierbares Element aus M. Zeigen Sie: Die Abbildung $\kappa : \; M \longrightarrow M$ mit $\kappa(g) = aga^{-1}$ ist ein Monoidautomorphismus.

(b) Seien S_n die Gruppe der Permutationen der Menge $X = \{1, \ldots, n\}$, $\rho \in S_n$ und $i_1, \ldots, i_r \in X$ paarweise verschieden. Zeigen Sie: Für die zyklische Permutation oder den Zyklus $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$ gilt

$$\rho \circ \alpha \circ \rho^{-1} = \alpha_\rho \text{ mit } \alpha_\rho = (\rho(i_1) \cdots \rho(i_r))$$

(c) In der bis auf die Reihenfolge eindeutigen Darstellung einer Permutation $\sigma \in S_n$ durch paarweise disjunkte Zyklen sei $a_\sigma(k)$ die Anzahl der Zyklen der Länge k.[1] Zeigen Sie für $\sigma, \tau \in S_n$:

Wenn $a_\sigma(k) = a_\tau(k)$ für $k \geq 2$, dann gibt es $\rho \in S_n$ derart, dass $\sigma = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$.

Anleitung: Betrachte die Zyklenzerlegungen von σ, τ in der Form $\sigma = \alpha^{(1)} \circ \cdots \circ \alpha^{(r)}, \tau = \beta^{(1)} \circ \cdots \circ \beta^{(s)}$ und begründe, dass $r = s$ und dass o.E. die Längen der Zyklen $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ jeweils gleich und ≥ 2 sind. Seien dann $\alpha^{(i)} = (\alpha_{i1}\alpha_{i2} \cdots \alpha_{ir}), \beta^{(i)} = (\beta_{i1}\beta_{i2} \cdots \beta_{ir})$. Jetzt kann ρ definiert werden.

Bemerkung: Auf Grund von (a) und (b) gilt in (c) auch die Umkehrung.

(8/9) Sei $G = \langle a \rangle = \{a^k : \; k \in \mathbb{Z}\}$ eine multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe [2] mit neutralem Element 1 $(= a^0)$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $U_k = \{g \in G : \; g^k = 1\}$ eine Untergruppe.

(b) Wenn $U_k \neq \{1\}$ für ein $k > 0$, dann ist G endlich.

Seien jetzt $|G| = n = \mathsf{ord}\,(a) < \infty$, $T_n = \{k \in \mathbb{N} : \; k|n\}$ und $\boldsymbol{k, k' \in T_n}$.

(c) $\mathsf{ord}\,(b) \big| \mathsf{ord}\,(a)$ für alle $b \in G$.

(d) Für alle $t \in T_n$ gibt es ein $b \in G$ mit ord (b)=t.

(e) $U_k = \langle b \rangle$ mit geeignetem $b \in G$, wobei ord (b)=k. Insbesondere gilt: $|U_k| = k$.

(f) Sei $b \in G$, dann gilt: $\mathsf{ord}\,(b) = k \Leftrightarrow U_k = \langle b \rangle$. Insbesondere gibt es außer den U_k keine weiteren Untergruppen in G.

(g) $U_k \subseteq U_{k'} \Leftrightarrow k|k'$ und insbesondere: $U_k = U'_k \Leftrightarrow k = k'$.

(h) $U_{\mathsf{ggT}(k,k')} = U_k \cap U_{k'}$ und $U_{\mathsf{kgV}(k,k')} = U_k \cdot U_{k'} = \{uu' : \; u \in U_k, u' \in U_{k'}\}$.

6 der 8 Teilaufgaben sind zu bearbeiten. Die nicht bearbeiteten Teile dürfen bei Bedarf benutzt werden.

.....

[1] Das Monom $x_1^{\alpha_\sigma(1)} \cdots x_n^{\alpha_\sigma(n)}$ ist Bestandteil der so genannten Zyklenzeiger oder Zyklenindex (cycle index). Eine interessante Information zur Benutzung finden Sie ab Seite 15 in dem Text:
`www.ikt.tu-bs.de/mitarbeiter/assis/deimel/fradei_ilmenau.pdf`

[2] oder - i.W. äquivalent - $G = \langle a \rangle$ mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.