Modul Algebra 2 7. Mai 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 4

(10) Sei $\mathsf{Q} = \langle A, B\rangle$ die von $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $\left(\mathbb{C}^{2\times 2}, \cdot, E\right)$ erzeugte Untergruppe. Q heißt **Quaternionengruppe**.

(a) Bestimmen Sie $|\mathsf{Q}|$.

(b) Bestimmen Sie alle Normalteiler in Q.

(c) Weisen Sie nach, dass Q nicht isomorph ist zur Diedergruppe D_4 (Bezeichnung der Vorlesung!).

(11) Sei G eine Gruppe, R eine Teilmenge von G und

$$\boldsymbol{K(R) = \bigcap_{\substack{N \text{ Normalteiler} \\ R \subseteq N}} N}$$

Zeigen Sie:

(a) $K(R)$ ist Normalteiler und ist $f : G \to H$ ein Gruppenmorphismus und R eine Teilmenge des Kerns von f, dann folgt

$$K(R) \subseteq \text{Kern } f.$$

(b) Sei $G = S_3$. Bestimmen Sie $K(\{\tau_{12}\})$ und $K(\{\tau_{12}\tau_{23}\})$.

(12) Zwei Beispiele von Normalteilern.

(a) Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{A}$ die Menge der Automorphismen von G. Ein Automorphismus σ heißt *innerer Automorphismus von* G, wenn $\sigma = \sigma_g$ mit einem $g \in G$. Dabei ist $\sigma_g(x) = gxg^{-1}$ für $x \in G$.

Zeigen Sie: $\mathfrak{A}$ ist eine Untergruppe von $\mathsf{Abb}\,(G)$ und die Menge I der inneren Automorphismen ist ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$.

(b)[1] Sei F die in der Vorlesung konstruierte von $T = \{x, y\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir schreiben $b_1 \cdots b_l$ statt $(b_1, \ldots, b_l)$, x^{-1} statt x', y^{-1} statt y', und wir lassen das Verknüpfungssymbol $*$ beim Anschreiben von Produkten weg.[2]
Zeigen Sie: Die von $\{x^2, xyx^{-1}, y\}$ erzeugte Untergruppe G in F ist ein Normalteiler vom Index 2.[3]

.....

[1] Teil einer Übungsaufgabe aus Algebra 1, Saarbrücken , WiSe 2003/2004

[2] Beispiel: Die Gleichung $(x, y, x, y) * (y', x', y, x') = (x, y, y, x')$ geht über in $(xy)^2y^{-1}x^{-1}yx^{-1} = xy^2x^{-1}$.

[3] Bemerkung: Ein Resultat von Nielsen und Schreyer besagt, dass auch die Untergruppen von F allesamt freie Gruppen sind. Da G endlichen Index in F hat, lässt sich die Anzahl freier Erzeugender aus der Formel $1 + [F : G](r-1)$ berechnen, wobei r die Anzahl der freien Erzeugenden von F ist. Im Beispiel dieser Aufgabe ist demnach die Gruppe G isomorph zu einer von 3 Elementen frei erzeugten Gruppe. Die bisher in dieser Vorlesung erarbeiteten Kenntnisse reichen aus, um die entsprechenden Passagen etwa in dem folgenden Klassiker zur Gruppentheorie zu studieren: *Marshall Hall (Junior), The Theory of Groups, Kapitel 7, z.B.: Macmillan, 1967.*