Aufgabenblatt 5

(13) Ein Würfel sei im $\mathbb{R}^3$ so plaziert, dass sein Mittelpunkt im 0-Punkt liegt. Die Ecken einer Seitenfläche seien gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D bezeichnet. Die weiteren Ecken sind dann $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ mit $\overline{A} = -A, \overline{B} = -B, \overline{C} = -C, \overline{D} = -D$. Entsprechend gilt für die vier Raumdiagonalen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Würfels

$$\alpha = \left[A, \overline{A}\,\right], \beta = \left[B, \overline{B}\,\right], \gamma = \left[C, \overline{C}\,\right], \delta = \left[D, \overline{D}\,\right] .$$

Dabei ist z.B. $\left[A, \overline{A}\,\right]$ die Menge der Punkte der Verbindungsstrecke von A und $\overline{A}$. Schließlich seien $W = \{A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}, D, \overline{D}\}$ die Menge der Eckpunkte des Würfels und $R = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ die Menge der Raumdiagonalen.
In dieser Aufgabe sollen **die Symmetriegruppe des Würfels** [1]

$$G = \{P \in \mathcal{O}_3 : \ PW \subseteq W\}$$

untersucht und dabei ein paar der Methoden aus Kapitel 1 benutzt werden. Es sei noch $G_1 = \{P \in G : \ \det P = 1\}$.

(a) Sei S die Punktspiegelung am 0-Punkt. Es ist $S = -E_3$ und somit $S \in \mathcal{O}_3$. Zeigen Sie:
Die Untergruppen $\langle S \rangle$ und G_1 sind Normalteiler, $\langle S \rangle \bigcap G_1 = \langle E \rangle$, $\langle S \rangle \cdot G_1 = G$ [2] und $G_1 \cong {}^{G}/_{\langle S \rangle}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von §2 Satz 7(a), dass $|G_1| = 24$ und zeigen Sie dann, dass $|G| = 48$.

(c) Zeigen Sie durch die Betrachtung des folgenden wohldefinierten Gruppenmorphismus (Nachweis!), dass die beiden Gruppen G_1 und S_4 isomorph sind:

$$\pi \ : \ G \longrightarrow S(R)$$

mit $\pi(P) =$ durch P bewirkte Permutation der Raumdiagonalen.

(14) **Normalteiler in D_n.** Sei $n \geq 3$ ungerade und k ein Teiler von n. Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler der Ordnung k in D_n gibt und geben Sie, wenn möglich, einen Gruppenmorphismus $\phi : \mathsf{D}_n \to \mathsf{D}_n$ an mit einem Kern der Ordnug k.

(15) **Die Quaternionengruppe Q** aus Aufgabe (10) **ist frei erzeugt von A, B mit definierenden Relationen**

$$\boldsymbol{A^4 = 1, \ A^2 = B^2, \ BAB^{-1} = A^{-1}.}$$

Sie können dabei analog zu den Beispielen 3 und 4 in §5 vorgehen.

.....

[1] Bitte nicht vergessen: was immer Sie zu diesem klassischen Thema finden, die Aufgabe ist genau wie angegeben und im Kontext der Vorlesung zu bearbeiten. Ein schöner Text ist z.B.: `http://www.math.unibas.ch/~walser/institut/vorlesungen/07ss/MfN/Vorlesung/217_Symmetriegruppen.pdf`

[2] In der Gruppentheorie sagt man dann: G ist (inneres) direktes Produkt der beiden Normalteiler $\langle S \rangle$ und G_1.