Modul Algebra 2 30. Mai 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 7

(19) **(a)** Seien $K \lhd L \lhd M$ Körpererweiterungen. Zeigen Sie direkt und ausführlich auf Grund des Standes der Vorlesung vor Satz 13 in § 11:

$$[M:K] < \infty \Rightarrow \ \big[\ [M:L] < \infty \text{ und } [L:K] < \infty\ \big].$$

Dies wurde beim Beweis von Satz 13 in § 11 benutzt.

(b) Sei $K \lhd M$ eine Körpererweiterung und seien $a, b \in M$. Zeigen Sie:

$$\big(K[a]\big)[b] = \big(K[b]\big)[a]\ .$$

(c) Zeigen Sie: Ein Unterring R einer über K algebraischen Körpererweiterung $K \lhd M$, der K enthält, ist ein Unterkörper.

(20)[1]

(a) Zeigen Sie: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.

(c) Bestimmen Sie $\big[\mathbb{Q}[e^{\frac{2\pi i}{6}}] : \mathbb{Q}\big]$.

(d) Bestimmen Sie $\big[\mathbb{Q}[e^{\frac{2\pi i}{8}}] : \mathbb{Q}\big]$.

(21) Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi :\ R \to R'$ ein Ringisomorphismus, dann ist $\varphi\,|_{G(R)} :\ G(R) \to G(R')$ ein Gruppenisomorphismus.

(b) Seien $K \lhd L$, $K \lhd L'$ Körpererweiterungen, $a \in L, a' \in L'$ beide algebraisch über K, und gelte $\mathsf{MiPo}_K(a) = \mathsf{MiPo}_K(a')$. Dann gibt es einen K-linearen Ringisomorphismus $\varphi :\ K[a] \to K[a']$ mit $\varphi(a) = a'$.

.....

[1] Sie dürfen bei dieser Aufgabe ohne Beweis benutzen, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ nicht rational sind. Allerdings gehen wir davon aus, dass Sie wissen, wie man das begründet !