Aufgabenblatt 8

(22) **Vereinfachung eines Ausdrucks.** Seien k die Summe der letzten drei von 0 verschiedenen Ziffern Ihrer Matrikelnummer und α eine komplexe Zahl mit der Eigenschaft

$$\alpha^3 = (k-10)\alpha - k \ .$$

Gegeben sei außerdem der Ausdruck

$$\frac{\alpha^4 + \alpha^2 - k}{\alpha(\alpha^3 - \alpha^2 + (10-k)\alpha + (2k-9))}$$

Zeigen Sie: Der Ausdruck ist wohldefiniert, stellt also eine komplexe Zahl dar, und lässt sich vereinfachen zu

$$a\alpha^2 + b\alpha + c$$

mit geeigneten $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie a, b, c.

(23) **(a)** Bestimmen Sie die Minimalpolynome aller Zahlen aus $\mathbb{Q}[i] \setminus \mathbb{Q}$. Sie gehen alle durch Substitution aus $x^2 + 1$ hervor.

(b) Zeigen Sie: Der Grad eines Primpolynoms aus $\mathbb{Q}[x]$, das eine Nullstelle in einer n-dimensionalen Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ besitzt, ist ein Teiler von n.

(24) (3 Bonuspunkte)

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Sind $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, dann ist $\mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_k)] := (\cdots(\mathbb{Q}[a_1])[a_2])\cdots)[a_k]$ eine endlich-dimensionale algebraische Körpererweiterung (wenn Sie abkürzen wollen, kurz KE) von $\mathbb{Q}$.

Im Allgemeinen lässt sich zwar ergänzend noch zeigen, dass es in (a) auf die Reihenfolge der a_i nicht ankommt, siehe auch Aufgabe (19)(b). Im Folgenden ist die Reihenfolge aber wichtig. Daher die Schreibweise $\mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_k)]$. Seien $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_k)]$ heißt **iterierte Quadratwurzelerweiterung (iQE)** von $\mathbb{Q}$, wenn für $1 < i \leq k$ gilt: $\big[\mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_i)] : \mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_{i-1})]\big] \leq 2$. Sei $\overline{\mathbb{Q}}^{\,2}$ die mengenmäßige Vereinigung aller iterierten Quadratwurzelerweiterungen von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(b) Die $\mathbb{Q}$-Dimension einer iterierten Quadratwurzelerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist eine Potenz von 2.

(c) $\overline{\mathbb{Q}}^{\,2}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.[(1)(2)]

(d) Die $\mathbb{Q}$-Dimension eines jeden über $\mathbb{Q}$ endlichdimensionalen Unterkörpers von $\overline{\mathbb{Q}}^{\,2}$ ist eine Potenz von 2.

(e) $\overline{\mathbb{Q}}^{\,2}$ lässt keine zweidimensionalen Körpererweiterungen zu.

---

(1) Der Körper $\overline{\mathbb{Q}}^{\,2}$ tritt auf im Zusammenhang mit der algebraischen Untersuchung (und Lösung !) der klassischen Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal. Genaueres können Sie z.B. in einem kurzen Skript über die Vorlesungsseite im Internet finden. Häufig werden die klassischen Konstruktionsprobleme als Anwendungsbeispiel der Galoistheorie behandelt. Letztere wurde aber sicher nicht dazu entwickelt und ein Großteil der Konstruktionsprobleme kann bereits im Kontext endlichdimensionaler algebraischer Körpererweiterungen behandelt werden. Auf neuere und ebenfalls interessante erweiterte Konstruktionsprobleme wird am Ende des oben erwähnten Skripts hingewiesen.

(2) Anleitung: Wenn $\big[\mathbb{Q}[a] : \mathbb{Q}\big] \leq 2$, dann auch $\big[\mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_k, a)] : \mathbb{Q}[(a_1, \ldots, a_k)]\big]$