Modul Algebra 2 11. Juni 2007
Sommersemester 2007
Schmale

Aufgabenblatt 9

(25) Sei G eine endliche multiplikativ geschriebene kommutative Gruppe mit mindestens zwei Elementen. Seien außerdem $p_1, \ldots, p_r$, $G_{p_1}, \ldots G_{p_r}$ definiert wie im Beweis von Satz 3 in §13 der Vorlesung. Zeigen Sie (ggf. für $1 \leq i \leq r$):

(a) G_{p_i} ist eine Untergruppe von G.

(b) $G_{p_i} \bigcap \prod_{j \neq i} G_{p_j} = \{1\}$, wobei $\prod_{j \neq i} G_{p_j} = \left\{a_1 \cdots a_r : \ a_j \in G_{p_j}, 1 \leq j \leq r, \, a_i = 1\right\}$.

Anleitung: Setze z.B. $b = \prod_{j=1, j \neq i}^{r} a_j$, *wobei* $a_j \in G_{p_j}$ *und betrachte* b^d *mit* $d = \prod_{j=1, j \neq i}^{r} \mathsf{ord}\,(a_j)$. *Kann* b *in* G_{p_i} *sein ?*

(c) $G = G_{p_1} \cdots G_{p_r} = \left\{a_1 \cdots a_r : \ a_j \in G_{p_j}, 1 \leq j \leq r\right\}$.

Anleitung: Seien etwa $\mathsf{ord}\,(a) = n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}$ *und* $d_i = \prod_{\jmath \neq i} p_j^{\alpha_j}$. *Wo liegt* a^{d_i} *? Gibt es* c_i *so, dass* $\sum_{i=1}^{r} c_i d_i = 1$ *?*

(d) Wenn $a = a_1 \cdots a_r$ und $a_j \in G_{p_j}$, dann ist

$$\mathsf{ord}\,(a) = \prod_{j=1}^{r} \mathsf{ord}\,(a_j) \ .$$

Bemerkung: Die Ergebnisse in dieser Aufgabe implizieren, dass die endliche kommutative Gruppe G isomorph ist zum cartesischen Produkt $G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_r}$ mit komponentenweiser Verknüpfung.

(26) Finden Sie drei verschiedene normierte Primpolynome $f, g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$ vom Grad 2 (Nachweis !) und dann jeweils ein Erzeugendes Element a, b und c der zyklischen Gruppen

$$G_f = G\big(\mathbb{Z}_3[x]_{2,f}\big), G_g = G\big(\mathbb{Z}_3[x]_{2,g}\big) \text{ und } G_h = G\big(\mathbb{Z}_3[x]_{2,h}\big)$$

(27) Geben Sie explizit Isomorphismen an zwischen den drei in der vorangehenden Aufgabe benutzten und als Restringe dargestellten Körpern, von denen wir ja aus der Theorie wissen, dass sie paarweise isomorph sind.