Die Aufgabe (31)(a) verleitet anscheinend dazu, ungenau und oberflächlich mit ihr umzugehen und so das Ziel der Beschäftigung mit den gegebenen iterierten Wurzelausdrücken nicht zu erreichen: ein erstes Gespür entwickeln für die Schwierigkeiten, die gemeistert werden müssen, um mit solchen Ausdrücken korrekt Nullstellen zu beschreiben. Im Folgenden ist ein Beispiel einer vollständigen Lösung wiedergegeben.

Lösung zu Aufgabe (31)(a):

Sei $s = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$. Sei $\sigma \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - s \in \mathbb{Q}[x]$. Es wird sich zeigen, dass die folgenden Rechnungen unabhängig davon sind welche Nullstelle wir gewählt haben. Wenn $s = 0$ ist, dann gibt es sowieso nur eine Nullstelle.
Seien nun

$$r = -\frac{q}{2} + \sigma, \widetilde{r} = -\frac{q}{2} - \sigma$$

Die Polynome

$$x^3 - r, x^3 - \widetilde{r} \in \mathbb{C}[x] \tag{1}$$

haben jeweils drei Nullstellen $\varrho, \zeta\varrho, \zeta^2\varrho$, die paarweise verschieden sind, außer wenn $r = 0$ oder $\widetilde{r} = 0$. Dabei ist $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
Es wird sich gleich zeigen, dass wir die Nullstellen von $x^3 - r$ und $x^3 - \widetilde{r}$ nicht unabhängig voneinander wählen dürfen. Seien zunächst

$$w = \zeta^k\varrho, \widetilde{w} = \zeta^{\widetilde{k}}\widetilde{\varrho} \text{ mit } k, \widetilde{k} \in \{0, 1, 2\},$$

und mit jeweils einer Nullstelle ϱ und $\widetilde{\varrho}$ der beiden Polynome in (1).
Damit sei schließlich

$$\boldsymbol{a = w + \widetilde{w}}\ .$$

Erst jetzt kann es darum gehen, zu bestätigen, dass $f(a) = 0$.

Man berechnet

$$\begin{aligned} f(a) &= a^3 + pa + q \\ &= w^3 + 3w^2\widetilde{w} + 3w\widetilde{w}^2 + \widetilde{w}^3 + p(w + \widetilde{w}) + q \\ &= 3w\widetilde{w}(w + \widetilde{w}) + p(w + \widetilde{w}) \\ &= (3w\widetilde{w} + p)(w + \widetilde{w}) \end{aligned} \tag{2}$$

Es zeigt sich nun, dass bei geeigneter Wahl der Nullstellen der Polynome in (1) der Faktor $(3w\widetilde{w} + p)$ in (2) verschwindet. Dazu muss zumindest $w\widetilde{w}$ reell sein. Es ist

$$w\widetilde{w} = \zeta^k\zeta^{\widetilde{k}}\varrho\widetilde{\varrho}$$

und damit

$$(w\widetilde{w})^3 = (\varrho\widetilde{\varrho})^3 = r\widetilde{r} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-p}{3}\right)^3.$$

$w\widetilde{w}$ ist also eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - \left(\frac{-p}{3}\right)^3$, also etwa $w\widetilde{w} = \zeta^l\left(\frac{-p}{3}\right)$, l geeignet. Damit nun $w\widetilde{w}$ reell wird, ersetzen wir einfach die Nullstelle w durch die Nullstelle $w' = \zeta^{-l}w$.

Dann ist $w'\widetilde{w} = \left(\frac{-p}{3}\right)$ und in (2) ergibt sich - mit w' statt w - nun tatsächlich $\boldsymbol{f(a) = 0}$. $\square$