Eine Lösung zu Aufgabe(15).

Wiederholung der Konstruktion aus der Vorlesung für die spezielle Situation in der Aufgabe (15):

Sei F die in der Vorlesung konstruierte freie mit den beiden verschiedenen Buchstaben x, y erzeugte Gruppe. Sei K der von den „Relationen“ $x^4, y^2x^{-2}, xyxy^{-1}$ erzeugte Normalteiler in F. Dann ist $G = {}^{F}\!/_{K}$ eine so genannte freie Gruppe mit den Relationen

$$X^4 = 1_G, \quad Y^2X^{-2} = 1_G, \quad XYXY^{-1} = 1_G$$

oder umgeformt

$$X^4 = K = 1_G, \quad Y^2 = X^2, \quad YXY^{-1} = X^{-1} \ .$$

Dabei ist $X = xK$ und $Y = yK$.

Nun zur Lösung entlang der Beispiele in der Vorlesung:

Wir zeigen: $G \cong \mathsf{Q}$ mit einem Isomorphismus, der X auf A und Y auf B abbildet und dadurch dann automatisch eindeutig ist. Da G frei von X, Y erzeugt ist gegebenen Relationen, ist dann auch Q frei erzeugt von A, B mit den mit den durch Nachrechnen leicht zu bestätigenden entsprechenden Relationen.

Da G frei ist mit den gegebenen Relationen, entsteht durch die Zuordnung $X \mapsto A$, $Y \mapsto B$ ein surjektiver Gruppenmorphismus $\Psi : \ G \longrightarrow \mathsf{Q}$, vgl. dazu Beispiel 3 in §5. Daher ist jedenfalls $|G| \geq |\mathsf{Q}| = 8$. Sei $U = \langle X \rangle$. Da $\Psi(U) = \langle A \rangle$ eine Untergruppe der Ordnung 4 ist, und da $X^4 = 1_G$, folgt $|U| = 4$ ($\leq$ würde uns hier genügen). Weiter unten wird gezeigt:

$$\big[G : U\big] \leq 2 \tag{1}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Lagrange

$$|G| = |U| \cdot \big[G : U\big] \leq 8 \ .$$

Es folgt $|G| = |\mathsf{Q}| = 8$ und die Injektivität von Ψ. Insgesamt ist Ψ damit ein Isomorphismus.

Nachweis von (1):

Behauptung: $G = U \cup YU$, bzw. $\big[G : U\big] \leq 2$

Beweis: Weil $X \in U$ und auf Grund der in G gültigen Relationen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\boldsymbol{XU = U}$$
$$\boldsymbol{X^{-1}U = U}$$
$$\boldsymbol{Y^{-1}U} = YX^{-2}U = YX^{-1}X^{-1}U = YX^{-1}U = \boldsymbol{YU}$$
$$\boldsymbol{X(YU)} = XYU = YX^{-1}U = \boldsymbol{YU}, \text{ denn aus } XYXY^{-1} = 1_G \text{ folgt } XY = YX^{-1}.$$
$$\boldsymbol{X^{-1}(YU)} = (YX)U = \boldsymbol{YU}, \text{ denn aus } XYXY^{-1} = 1_G \text{ folgt auch } X^{-1}Y = YX.$$
$$\boldsymbol{Y^2U} = X^2U = \boldsymbol{U}.$$

Da G als Monoid erzeugt ist von X, Y, X^{-1}, Y^{-1}, sind alle Möglichkeiten erfasst, Linksnebenklassen zu bilden, denn ein beliebiges Element aus G hat ja die Form $Z_1 \cdots Z_s$ mit $Z_i \in \{X, Y, X^{-1}, Y^{-1}\}$ für $1 \leq i \leq s$. Unter Ausnutzung des Assoziativgesetzes kann deswegen $(Z_1 \cdots Z_s)U = (Z_1 \cdots Z_{s-1})(Z_sU)$ mit den obigen Gleichungen umgeformt werden und das Ergebnis ist stets U oder XU. Somit ist wie behauptet $\big[G : U\big] \leq 2$. $\square$