Eine mögliche Ausarbeitung zu Aufgabe (1) (a):

[ ] ist ein offensichtlich **neutrales Element** (oder per Definition). Nun zur **Assoziativität**:

Seien o.E. $a = [a_1, ...a_r], b = [b_1, ..., b_s], c = [c_1, ..., c_t]$ aus $\mathfrak{L}$ und $\neq [\,]$. Für $n \in M$ schreibe ich z. B. $n \in a$, wenn $n \in \{a_1, ...a_r\}$. Wenn $t \geq 2$, dann gilt

$$c = [c_1, ..., c_{t-1}] \cdot [c_t]$$

und

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot ([c_1, ...c_{t-1}] \cdot [c_t]) \tag{1}$$

Wenn das Assoziativgesetz schon gilt für Listen der Länge $< t$ als dritten Operanden und für Listen der Länge 1, dann folgt in (1)

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= ((a \cdot b) \cdot [c_1, ..., c_{t-1}]) \cdot [c_t] \\
&= (a \cdot (b \cdot [c_1, ..., c_{t-1}])) \cdot [c_t] \\
&= a \cdot ((b \cdot [c_1, ..., c_{t-1}]) \cdot [c_t]) \\
&= a \cdot (b([c_1, ..., c_{t-1}] \cdot [c_t])) \\
&= a \cdot (b \cdot c) \quad \text{denn} \quad c_t \notin [c_1, ..., c_{t-1}].
\end{aligned}$$

Es genügt also, die folgende Regel nachzuweisen und dann vollständige Induktion durchzuführen:

$$\forall a, b \in \mathfrak{L}\ \forall c_1 \in M: \quad (a \cdot b) \cdot [c_1] = a \cdot (b \cdot [c_1]) \tag{2}$$

Der Nachweis geschieht am einfachsten mit einer Fallunterscheidung, dabei kann ohne Einschränkung $a, b \neq [\,]$ angenommen werden.

$\boldsymbol{c_1 \in b}$**:** $\boldsymbol{c_1 \in a}$**:** dann ist $(a \cdot b)[c_1] = a \cdot b$ und $a \cdot (b \cdot [c_1]) = a \cdot b$

$\boldsymbol{c_1 \notin a}$**:** da $c_1 \in b$, ist $c_1 \in a \cdot b$ und somit $(a \cdot b)[c_1] = a \cdot b$
außerdem ist $a \cdot (b[c_1]) = a \cdot b$

$\boldsymbol{c_1 \notin b}$**:** $\boldsymbol{c_1 \in a}$**:** dann ist wieder $c_1 \in a \cdot b$ und $(a \cdot b)[c_1] = a \cdot b$
außerdem ist $a \cdot (b[c_1]) = a \cdot [b_1, ..., b_s, c_1] = a \cdot [b_1, ..., b_s] = a \cdot b$

$\boldsymbol{c_1 \notin a}$**:** dann ist mit $a \cdot b = [d_1, ...d_u]$ einerseits $(a \cdot b)[c_1] = [d_1, ...d_u, c_1]$
und andererseits $a \cdot (b[c_1]) = a \cdot [b_1, ...b_s, c_1] = [d_1, ..., d_n, c_1]$
da $c_1 \notin \{a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_s\}$.