Aufgabe (27). *Geben Sie explizit Isomorphismen an zwischen den drei in der vorangegangenen Aufgabe benutzten und als Restringe dargestellten Körpern, von denen wir ja aus der Theorie wissen, das sie paarweise isomorph sind.*

Wiederholung. *Die drei Körper aus der vorigen Aufgabe waren*

$$K := \mathbb{Z}_3[x]_{2,f},\ L := \mathbb{Z}_3[x]_{2,g} \text{ und } M := \mathbb{Z}_3[x]_{2,h}$$

mit den irreduziblen Polynomen

$$f := x^2 + 1,\ g := x^2 + 2x + x,\ \text{und } h := x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Wir benuzten den Homomorphiesatz für Ringe. Zunächst betrachten wir K und L. Der Einsetzhomomorphismus $\pi_{x+1} : \mathbb{Z}_3[x] \to \mathbb{Z}_3[x]$ ist ein Automorphismus, und es gilt $\pi_{x+1}(f) = g$.

Wir bestimmen nun den Kern von $\varphi = \varrho_g \circ \pi_{x+1} : \mathbb{Z}_3[x] \to L$. Es ist $\varphi(f) = \varrho_g(\pi_{x+1}(f)) = 0$. Damit folgt $\langle f \rangle_{\mathbb{Z}_3[x]} \subseteq \operatorname{Kern} \varphi$. Da f irreduzibel ist und $\mathbb{Z}_3[x]$ ein Hauptidealbereich ist $\langle f \rangle$ maximal. Wegen $\varphi(1) = \varrho_g(\pi_{x+1}(1)) = 1$ ist $\operatorname{Kern} \varphi \neq \mathbb{Z}_3[x]$, und es folgt

$$\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Kern} (\varrho_g \circ \pi_{x+1}) = \langle f \rangle_{\mathbb{Z}_3[x]} = \operatorname{Kern} \varrho_f.$$

Damit existiert nach dem Homomorphiesatz (φ und ϱ_f sind surjektiv) ein Isomorphismus $\psi : K \to L$ mit

$$\psi \circ \varrho_f = \varphi = \varrho_g \circ \pi_{x+1}.$$

Also wird ein Element $ax + b = \varrho_f(ax + b) \in K$ mit a und $b \in \mathbb{Z}_3$ unter ψ wie folgt abgebildet

$$\psi(ax + b) = (\psi \circ \varrho_f)(ax + b) = (\varrho_g \circ \pi_{x+1})(ax + b) = \varrho_g(ax + a + b) = ax + a + b,$$

da $\deg(ax + a + b) = \deg(ax + b) = 1 < 2 = \deg g$ ist.

Das folgende Diagramm fasst die Abbildungen noch einmal zusammen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_3[x] \arrow[r, "\sim", "\pi_{x+1}"'] \arrow[d, two heads, "\varrho_f"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \mathbb{Z}_3[x] \arrow[r, two heads, "\varrho_g"'] & L = \mathbb{Z}_3[x]_{2,g} \\
K = \mathbb{Z}_3[x]_{2,f} \arrow[urr, bend right, "\sim", "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

(Wie üblich bedeuten Pfeile mit Doppelspitzen surjektive Abbildungen).

Analog läßt sich ein Isomorphismus $\tilde{\psi} : L \to M$ konstruieren, denn es gilt $\pi_{x+1}(g) = h$. Für a und $b \in \mathbb{Z}_3$ ist

$$\tilde{\psi}(ax + b) = ax + a + b.$$

Da die Komposition von Isomorphismen wieder ein Isomorphismus ist, lässt sich als Isomorphismus $\hat{\psi} : K \to M$ einfach $\hat{\psi} := \tilde{\psi} \circ \psi$ wählen. Die Abbildungsvorschrift ist

$$\hat{\psi}(ax + b) = ax + 2a + b$$

mit a und $b \in \mathbb{Z}_3$.