Lösung zu Aufgabe (34):

Sei $J = \langle \dfrac{x^{\alpha^{(1)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(1)}}, x^{\alpha})}, \ldots, \dfrac{x^{\alpha^{(r)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(r)}}, x^{\alpha})} \rangle_{K[x_1,\ldots,x_n]}$.

$J \subseteq I_\alpha$:

Es genügt zu zeigen, dass die angegebenen Erzeuger von J in I_α enthalten sind. Dann sind auch alle $K[x_1, \ldots, x_n]$-linearen Kombinationen und somit das ganze Ideal J in I_α enthalten. Da aber $x^{\alpha^{(i)}} \in I$ für $1 \leq i \leq r$, ist auch

$$x^{\alpha^{(i)}} \frac{x^{\alpha}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i)}}, x^{\alpha})} = \frac{x^{\alpha^{(i)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i)}}, x^{\alpha})}\, x^{\alpha} \in I$$

und deswegen $\dfrac{x^{\alpha^{(i)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i)}}, x^{\alpha})} \in I_\alpha$.

$I_\alpha \subseteq J$:

Sei $f \in I_\alpha$, o.E. $f \neq 0$, und etwa $f = \sum_{j=1}^{s} c_j x^{\beta^{(j)}}$. Dann ist $fx^\alpha = \sum_{j=1}^{s} c_j x^{\alpha+\beta^{(j)}} \in I$. fx^α hat daher auch die folgende Darstellung: $fx^\alpha = \sum_{k=1}^{t} d_k x^{\delta^{(k)}}$, wobei $x^{\delta^{(k)}} = x^{\alpha^{(i_k)}} x^{\gamma^{(k)}}$ mit geeigneten $i_k \in \{1, \ldots, r\}$ und $\gamma^{(k)} \in \mathbb{N}^n$. Die Eindeutigkeit der Polynomdarstellung (K-lineare Unabhängigkeit der Monome in $K[x_1, \ldots, x_n]$) bewirkt, dass

$$\{x^{\alpha+\beta^{(j)}} : \quad c_j \neq 0\} = \{x^{\delta^{(k)}} : \quad d_k \neq 0\}.$$

M.a.W.: Für $j \in \{1, \ldots, s\}$ gibt es jeweils ein $k \in \{1, \ldots, t\}$ derart, dass

$$x^{\alpha+\beta^{(j)}} = x^{\delta^{(k)}} = x^{\alpha^{(i_k)}} x^{\gamma^{(k)}}.$$

Dann folgt aber mit $\delta = \min_{\leq_0}(\alpha^{(i_k)}, \alpha)$, bzw. $x^\delta = \mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i_k)}}, x^\alpha)$:

$$x^{\alpha-\delta} x^{\beta^{(j)}} = x^{\alpha^{(i_k)}-\delta} x^{\gamma^{(k)}}.$$

Da $\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i_k)}-\delta}, x^{\alpha-\delta}) = \mathsf{ggT}\big(\frac{x^{\alpha^{(i_k)}}}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i_k)}}, x^\alpha)}, \frac{x^\alpha}{\mathsf{ggT}(x^{\alpha^{(i_k)}}, x^\alpha)}\big) = 1$, folgt $x^{\alpha^{(i_k)}-\delta} \big| x^{\beta^{(j)}}$. Letzteres besagt: $x^{\beta^{(j)}} \in J$ und zwar für beliebiges $j \in \{1, \ldots, s\}$. Also liegt auch f in J. □