Lösung zur Aufgabe (13):

(a) $S = -E_3$ liegt im Zentrum von G und daher ist $\langle S \rangle$ ein Normalteiler. Da $G_1 = \mathsf{Kern}\,(\det|_G)$, ist auch G_1 ein Normalteiler. Klar ist auch $\langle S \rangle \bigcap \mathsf{Kern}\,(\det|_G) = \{E_3\}$. Schließlich ist $G = G_1 \dot{\bigcup} (S \cdot G_1)$, denn "$\supseteq$" gilt sowieso und "$\subseteq$" ergibt sich, weil für alle $P \in G$ entweder $P \in G_1$ oder $S \cdot P \in G_1$. Die Abbildung $\phi : G \to G_1, Q \cdot P \mapsto P$ für $P \in G_1, Q \in \langle S \rangle$ ist ein surjektiver Morphismus mit Kern $\langle S \rangle$.

(b) Sei X eine Ecke des Würfels, z.B. A, welche ist völlig egal. Durch Drehungen von Seitenflächen kann X in jede andere Ecke bewegt werden. Daher ist $G_1(X) = W$. Von X aus verlaufen drei Raumdiagonalen, unabhängig davon, welche Ecke gewählt wird. Die Drehungen aus G_1 um die Raumdiagonale $[X, \overline{X}]$, also um 0, 120 und 240 Grad, lassen X fest und nur diese. Daher ist $|G_1^X| = 3$ und man erhält $|G_1| = |G_1(X)| \cdot |G_1^X| = 8 \cdot 3 = 24$. Da G disjunkte Vereinigung ist von G_1 und $S \cdot G_1$, folgt schließlich $|G| = 48$.

(c) Alle Operationen aus G müssen Raumdiagonalen in Raumdiagonalen abbilden und diese permutieren. Somit ist π wohldefiniert. Es ist $\pi(E_3) = \mathsf{id}_R$. Seien $P, Q \in G$. Dann ist $\pi(P \cdot Q) = (PQ)|_R = P|_R \circ Q|_R = \pi(P) \circ \pi(Q)$. π ist also ein Gruppenmorphismus.
Ein $P \in G_1$, das alle Raumdiagonalen festlässt ist die Identität. S lässt alle Raumdiagonalen fest, also ist S aus $\mathsf{Kern}\,\pi$. Wenn $S \cdot P \in \mathsf{Kern}\,\pi$, dann auch $S \cdot (S \cdot P) = P$. und es folgt $P = E$. Somit ist $\mathsf{Kern}\,\pi = \langle S \rangle$ und $\mathsf{Bild}\,\pi \cong {}^{G}/_{\langle S \rangle}$. Aus Anzahlgründen ergibt sich $S_4 = \mathsf{Bild}\,\pi$.