Lösungsskizze zu den Aufgaben 8/9:

(a) klar, da G kommutativ ist.

(b) Sei $U_k \neq \{1\}, k > 0, b \in U_k \setminus \{1\}$, etwa $b = a^r \neq 1$. Dann ist $1 = a^{kr}$ und $kr > 0$. Sei d minimal > 0 und $a^d = 1$. Sei nun $a^k \in G, k \geq 2$ und etwa $k = qd + r, r \in \{0, \ldots, d-1\}$, dann ist $a^k = a^r \in \{1, a, \ldots, a^{d-1}\}$.

(c) Satz von Lagrange.

(d) Sei $n = t \cdot t'$. Setze $b = a^{t'}$. Dann ist $b^t = 1$. Jedenfalls (Beob. 6) gilt $\mathsf{ord}\,(b)|t$. Sei $d = \mathsf{ord}\,(b)$. Die Gleichung $b^d = a^{t'd} = 1$ impliziert $n < t'd$ und $t|d = \mathsf{ord}\,(b)$.

(e) U_k ist zyklisch nach Satz 7 (d): Aalso existiert $b \in G$ mit $U_k = \langle b \rangle$. Z.z. ist nun $\mathsf{ord}\,(b) = k$. Jedenfalls ist $\mathsf{ord}\,(b) = |\langle b \rangle| = |U_k|$. Wegen (c) ist $\mathsf{ord}\,(b) \in T_n$ und da $b^k = 1$, gilt: $\mathsf{ord}\,(b)|k$. Nach (d) gibt es $c \in G$ mit $\mathsf{ord}\,(c) = k$. Da $c \in U_k$, folgt $\langle c \rangle \subseteq \langle b \rangle$ und $k = |\langle c \rangle| \leq |\langle b \rangle| = \mathsf{ord}\,(b)$. Es folgt $\mathsf{ord}\,(b) = k$ und insbesondere $|U_k| = k$.

(f) $\underline{\Rightarrow:}$ $\mathsf{ord}\,(b) = k$, dann $b \in U_k, \langle b \rangle \subseteq U_k$. Da $|U_k| = k = |\langle b \rangle|$, folgt $U_k = \langle b \rangle$.
$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $U_k = \langle b \rangle$. Da $|U_k| = k$, folgt $\mathsf{ord}\,(b) = |\langle b \rangle = k$.

(g) $\underline{\Rightarrow:}$ $U_k \subseteq U_{k'}$, dann ist U_k Untergruppe von $U_{k'}$. Es folgt $k = |U_k| \big| |U_{k'}| = k'$.
$\underline{\Leftarrow:}$ Gelte $k|k'$ und sei $b \in U_k$. Dann ist $b^{k'} = 1$ und $b \in U_k$. Die Zusatzaussage folgt unmittelbar.

(h) $\underline{\text{"}\mathsf{ggT}\text{"}:}$ Nach (g) ist $U_{\mathsf{ggT}(k,k')} \subseteq U_k, U_{k'}$, also gilt $U_{\mathsf{ggT}(k,k')} \subseteq U_k \cap U_{k'}$. Sei nun $b \in U_k \cap U_{k'}$ und etwa $\mathsf{ggT}(k, k') = \alpha k + \alpha' k'$. Dann ist $b^{\mathsf{ggT}(k,k')} = (b^k)^\alpha \cdot (b^{k'})^{\alpha'} = 1$ und $b \in U_{\mathsf{ggT}(k,k')}$.
$\underline{\text{"}\mathsf{kgV}\text{"}:}$ Nach (g) folgt $U_k \cup U_{k'} \subseteq U_{\mathsf{kgV}(k,k')}$.
Da $U_{\mathsf{kgV}(k,k')}$ Untergruppe ist, folgt $U_k \cdot U_{k'} \subseteq U_{\mathsf{kgV}(k,k')}$. $U = U_k \cdot U_{k'}$ ist Untergruppe (!). Es folgt $k \;\big|\; |U|$ und $k' \;\big|\; |U|$ und somit $|U_{\mathsf{kgV}(k,k')}| = \mathsf{kgV}(k, k') \;\big|\; |U|$. Da $U \subseteq U_{\mathsf{kgV}(k,k')}$, folgt $|U| = |U_{\mathsf{kgV}(k,k')}|$ und $U_k \cdot U_{k'} = U = U_{\mathsf{kgV}(k,k')}$.