Einzelabgabe zur Geometrie

Einzelabgabe Geometrie
Blatt 5 - Aufgabe 11
Von: Roman Rathje
Tutor: Max Kronberg

Aufgabe 11

Seien $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} \in \mathbb{R}^3$ und $A := \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Teil (a)

Behauptung

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \textit{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} \textit{ bilden eine affine Basis des } \mathbb{R}^3.$$

Beweis

„$\Rightarrow$“

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass wenn $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist und $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ aus A durch elementare Spaltenumformungen hervorgeht, dann ist auch $\widetilde{A}$ invertierbar. Durch Subtraktion der ersten Spalte von der zweiten bis vierten Spalte erhalten wir folgende Matrix:

$$\widetilde{A} := \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} - a^{(0)} & a^{(2)} - a^{(0)} & a^{(3)} - a^{(0)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftarrow[\text{Sp. Umform.}]{\text{elementare}} \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Ebenfalls bekannt ist, dass eine 4×4-Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihr Rang und damit sowohl ihr Zeilen- als auch ihr Spaltenrang 4 ist. Damit folgt, dass alle Spalten der Matrix $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ linear unabhängig sind. Insbesondere sind also auch die letzten drei Spalten

$$\left(\begin{bmatrix} a^{(1)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(2)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(3)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

der Matrix linear unabhängig. Dies gilt dann ohne Einschränkungen auch für die Vektoren $(a^{(1)} - a^{(0)}), (a^{(2)} - a^{(0)}), (a^{(3)} - a^{(0)}) \in \mathbb{R}^3$.

Nach Satz 5.12 sind also $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ affin unabhängig und bilden eine affine Basis (Definition 5.11). Die Dimension eines durch n affin unabhängige Punkte erzeugten affinen Raumes ist dabei $n-1$. Damit bilden $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine affine Basis des $\mathbb{R}^3$.

„$\Leftarrow$"

Sei $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ eine affine Basis des $\mathbb{R}^3$, nach Definition 5.11 sind also $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ affin unabhängig. Das heißt, dass die Vektoren $(a^{(1)} - a^{(0)}), (a^{(2)} - a^{(0)}), (a^{(3)} - a^{(0)}) \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind (Satz 5.12).
Offenbar ändert sich an der linearen Unabhängigkeit auch dann nichts, wenn diese Vektoren wie folgt zu Vektoren des $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden:

$$\left(\begin{bmatrix} a^{(1)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(2)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(3)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{(linear unabhängig)}$$

Außerdem sind sogar

$$\left(\begin{bmatrix} a^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(1)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(2)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{(3)} - a^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

linear unabhängig. Denn selbst wenn es $\mu_i \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $a^{(0)} = \sum_i^3 \mu_i \cdot (a^{(i)} - a^{(0)})$, so kann mit diesen $\mu_i \in \mathbb{R}$ nicht die 1 als Eintrag in der letzten Zeile des ergänzten Vektors erzeugt werden. Damit ist klar, dass die Spalten der Matrix

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} - a^{(0)} & a^{(2)} - a^{(0)} & a^{(3)} - a^{(0)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

linear unabhängig sind. Mit einfachen elementare Spaltenumformungen (Addition der ersten Spalte zur zweiten bis vierten Spalte) folgt, dass dann auch alle Spalten der dardurch aus $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ hervorgehende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ linear unabhängig sind.

$$A := \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow[\text{Sp. Umform.}]{\text{elementare}} \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} - a^{(0)} & a^{(2)} - a^{(0)} & a^{(3)} - a^{(0)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{A}$$

Damit folgt direkt (lineare Algebra), dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist.

$\square$

Teil (b)

Sei im Folgenden $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ eine affine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Behauptung

$\lambda \in \mathbb{R}^4$ ist baryzentrischer Koordinatenvektor von $x \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der affinen Basis $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$

Beweis

„$\Rightarrow$“

Ist $\lambda \in \mathbb{R}^4$ der eindeutige baryzentrischer Koordinatenvektor von $x \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der affinen Basis $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$, so ist

$$x = \lambda_0 a^{(0)} + \lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \lambda_3 a^{(3)} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \cdot a^{(i)} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1$$

Es folgt also direkt

$$A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \cdot a^{(i)} \\ \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

„$\Leftarrow$“

Sei zunächst $\lambda \in \mathbb{R}^4$ und gelte nach Voraussetzung $A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$. Also:

$$A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \cdot a^{(i)} \\ \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \end{bmatrix} \overset{\text{Voraus.}}{=} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das bedeutet, dass zum einen $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \cdot a^{(i)} = \lambda_0 \cdot a^{(0)} + \lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \lambda_3 \cdot a^{(3)} = x$ und zum anderen $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1$.

Damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ also die durch λ bestimmte affin Kombination aus $a^{(0)}, \dots, a^{(3)}$. Das heißt, dass $\lambda \in \mathbb{R}^4$ der eindeutige baryzentrischer Koordinatenvektor von $x \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der nach Voraussetzung affinen Basis $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ ist (vgl. Beobachtung 5.15).

$\square$

Teil (c)

Sei im Folgenden $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ eine affine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Behauptung

Es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart dass für den baryzentrischen Koordinatenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^4$ des Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der afinen Basis $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lambda = B \cdot x + b$$

Beweis

Nach Aufgabenteil (a) wissen wir, die Matrix $A = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist invertierbar. Das heißt es gibt eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ derart, dass $A^{-1} \cdot A = E_{(4)}$.

Mit den an $\lambda \in \mathbb{R}^4$ geküpften Voraussetzungen wissen wir außerdem nach Aufgabenteil (b), dass $A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$. Damit folgt:

$$A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E_{(4)}} \cdot \lambda = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit der nicht genauer bestimmten zu A inversen Matrix $A^{-1} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 4} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \lambda = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} (a_{1j} \cdot x_j) + 1 \cdot a_{14} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{3} (a_{4j} \cdot x_j) + 1 \cdot a_{44} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} (a_{1j} \cdot x_j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{3} (a_{4j} \cdot x_j) \end{bmatrix}}_{=:B\cdot x} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{14} \\ \vdots \\ a_{44} \end{bmatrix}}_{=:b} = B \cdot x + b \end{aligned}$$

Das heißt, es gibt eine Matrix $B = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 4 \\ 1 \le j \le 3}} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und ein $b = (a_{i4})_{1 \le i \le 4} \in \mathbb{R}^4$ derart, dass $\lambda = B \cdot x + b$.

$\square$