# Geometrie WiSe 10/11

Einzelabgabe
Aufgabe 14
Aufgabenblatt Nr. 6

Student: Benedikt Grüter
Mat.-Nr.: 9680320

Tutor : Daniel Knafla
Dozent : Prof. Dr. Wiland Schmale

## Aufgabe 14

Die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei eine echte Streckung im Sinne der Definition in Beispiel 6.8. Zeigen Sie:

(a) Für je zwei verschiedene Punkte $x$ und $y$ aus $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden $f(x) \vee f(y)$ und $x \vee y$ parallel.

Vorüberlegungen: Die Punkte $x$ und $y$ müssen verschieden sein, damit eine Gerade durch sie gehen kann (Beobachtung 1.4). Weiterhin hat eine Verbindungsgerade die Form:

$$x \vee y = x + \langle y - x \rangle_{\mathbb{R}}$$

Da $f$, laut Voraussetzung, eine echte Streckung im Sinne des Beispiels 6.8 ist, hat sie folgende Form:

gilt für alle $x$!

→ für $x$:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\ell(x-a)}_{=\alpha(x-a)}$$

mit $x, a \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \neq 0$

Erst Abb-vorschrift aufschreiben, dann $f(x)$ und $f(y)$ bestimmen!

→ für $y$:

$$f(y) = f(a) + \underbrace{\ell(y-a)}_{=\alpha(y-a)}$$

mit $y, a \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \neq 0$

Mit Beobachtung 1.4 sieht die Verbindungsgerade von $f(x)$ und $f(y)$ wie folgt aus:

$$f(x) \vee f(y) = f(a) + \alpha(x-a) + \langle f(a) + \alpha(y-a) - (f(a) + \alpha(x-a)) \rangle_{\mathbb{R}}$$

Nach Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) \vee f(y) &= f(a) + \alpha(x-a) + \langle (f(a)+\alpha(y-a)) - (f(a) + \alpha(x-a)) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= f(a) + \alpha(x-a) + \langle \alpha(y-a) - \alpha(x-a) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= f(a) + \alpha(x-a) + \langle \alpha y - \alpha a - \alpha x + \alpha a \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= f(a) + \alpha(x-a) + \langle \alpha y - \alpha x \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\overset{LA}{=} f(a) + \alpha(x-a) + \alpha \langle y - x \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung der beiden Verbindungsgeraden $x \vee y$ und $f(x) \vee f(y)$ fällt auf, dass sie die selbe Richtung aufweisen.

$$x \vee y = x + \langle y - x \rangle_{\mathbb{R}}$$
$$f(x) \vee f(y) = f(a) + \alpha(x-a) + \alpha \langle y - x \rangle_{\mathbb{R}}$$

gleiche Richtung

Daraus folgt, dass die beiden Geraden parallel verlaufen

$$x \vee y \parallel f(x) \vee f(y)$$

//

✓

**(b) Wenn $\alpha \neq 1$, dann hat $f$ genau einen Fixpunkt $p^*$!**

Zu zeigen: Es gibt genau einen Fixpunkt $p^*$, wenn $\alpha \neq 1$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für einen Fixpunkt folgendes gelten muss:

$$f(p^*) = p^*$$

$\alpha = ?$ $\in ?$

bzw.: $$f(p^*) = f(a) + \underbrace{\ell_f(p^* - a)}_{= \alpha(p^* - a)}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} p^* &= f(a) + \alpha(p^* - a) \\ \Leftrightarrow\quad p^* &= f(a) + \alpha p^* - \alpha a \qquad | -\alpha p^* \\ \Leftrightarrow\quad p^* - \alpha p^* &= f(a) - \alpha a \\ \Leftrightarrow\quad (1-\alpha) p^* &= f(a) - \alpha a \qquad | : (1-\alpha) \\ \Leftrightarrow\quad p^* &= \frac{f(a) - \alpha a}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Erlaubt, da $\alpha \neq 1$ lt. Voraussetzung

Da laut Voraussetzung gilt, dass $\alpha$ und $a$ beliebig aber fest sind und $\alpha \neq 0, 1$ gibt es genau einen Fixpunkt $p^*$. //

✓

c) **Alle Geraden durch den Fixpunkt $p^*$ werden fest gelassen.**

Zu zeigen ist, dass alle Punkte von einer Geraden, die durch den Fixpunkt gehen, wieder in Punkte auf der Geraden abgebildet werden.

Sei also $q$ ein zweiter Punkt, der mit $p^*$ eine Gerade bildet. $(p^* \vee q \overset{(*)}{=} p^* + \langle q - p^* \rangle_{\mathbb{R}})$ ~~so liegen diese Punkt~~

das ist z.z. (So werden diese wieder auf der gleichen Gerade abgebildet)

$$\begin{aligned} f(p^* \vee q) &\overset{(*)}{=} f(p^* + \langle q - p^* \rangle_{\mathbb{R}}) \\ &= f(a) + \alpha(p^* + \langle q - p^* \rangle_{\mathbb{R}} - a) \\ &= f(a) + \alpha p^* + \alpha \langle q - p^* \rangle_{\mathbb{R}} - \alpha a \\ &= f(a) - \alpha a + \alpha p^* + \alpha \langle p - q^* \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\overset{(**)}{=} p^* - \alpha p^* + \alpha p^* + \alpha \langle p - q^* \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \underbrace{p^* + \alpha \langle p - q^* \rangle_{\mathbb{R}}}_{= p^* \vee q} \end{aligned}$$

Somit folgt, dass alle Geraden durch den Fixpunkt $p^*$ festglassen werden. //

✓

---

(**) Bemerkung: Aus Aufgabenteil (b) wissen wir:

$$f(a) - \alpha a = (1 - \alpha) p^* = p^* - \alpha p^*$$

schön bis auf Kleinigkeiten!

5/5