Aufgabe (15)

Berechnen Sie eine Matrixdarstellung gemäß 6.13 für die Spiegelung

(a) in $\mathbb{R}^2$ in Richtung $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}}_{=: U_2}$ an der Geraden Γ,

mit $\Gamma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: a} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}}_{=: U_1}$

Wir suchen also eine affine Abb. f mit $f(x) = Ax + b \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2$.
Für die Spiegelung f in $\mathbb{R}^2$ an Γ in Richtung U_2 wissen wir, dass sie erklärt ist durch die Vorschrift

$$f(p) = a + \ell(p - a) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}^2$$

Außerdem gilt die Vorschrift:

$$\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)} - u^{(2)} \quad \text{für } u^{(1)} \in U_1, u^{(2)} \in U_2.$$

Aus Beobachtung 6.6 wissen wir außerdem, dass eine affine Abbildung durch die Bilder der affinen Basispunkte vollständig festgelegt ist. Deshalb bestimmen wir zunächst eine affine Basis des $\mathbb{R}^2$:

Nach Satz 5.12 gilt:

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=: u^{(2)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: u^{(1)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=: u^{(3)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: u^{(1)}} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$ ist (offentsichtlich) eine lineare Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= u^{(1)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{= u^{(2)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= u^{(3)}} \right)$$ ist eine affine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Nun bestimmen wir die Bilder der affinen Basispunkte mit der uns bekannten Funktionsvorschrift.

$$f(u^{(1)}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}$$

$$f(u^{(2)}) = f\left(\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{1\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}}}$$

$$f(u^{(3)}) = f\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{1\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}}}$$

Nun können wir die Matrix A für die Matrixdarstellung wie folgt bestimmen (gemäß Übung v. 08.12.2010)

$$A = [f(u^{(2)}) - f(u^{(1)}), f(u^{(3)}) - f(u^{(1)})] \cdot [u^{(2)} - u^{(1)}, u^{(3)} - u^{(1)}]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{bmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3/25 & -4/25\\4/25 & 3/25\end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}7/25 & 24/25\\24/25 & -7/25\end{bmatrix}}}$$

(*) Berechnung der Inversen

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}3 & 4\\-4 & 3\end{matrix}}_{=:B} \;\middle|\; \begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\right) \begin{matrix}Z_1 \to 1/3 \cdot Z_1\\ Z_2 \to Z_2 + 4/3\, Z_1\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 4/3\\0 & 25/3\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}1/3 & 0\\4/3 & 1\end{matrix}\right) \begin{matrix}Z_1 \to Z_1 - 4/25 \cdot Z_2\\ Z_2 \to 3/25 \cdot Z_2\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix}3/25 & -4/25\\4/25 & 3/25\end{matrix}}_{=B^{-1}}\right)$$

Dann ist $b = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(**)}{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\underbrace{-4/25\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}_{\in U_1} \underbrace{-3/25\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}_{\in U_2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{4}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16/25 \\ -12/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/25 \\ -12/25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18/25 \\ -24/25 \end{pmatrix}$$

(**) Berechnung der Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, mit denen gilt:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \to 1/4 \cdot Z_1 \\ Z_2 \to Z_2 - 3/4 \cdot Z_1 \end{array}$

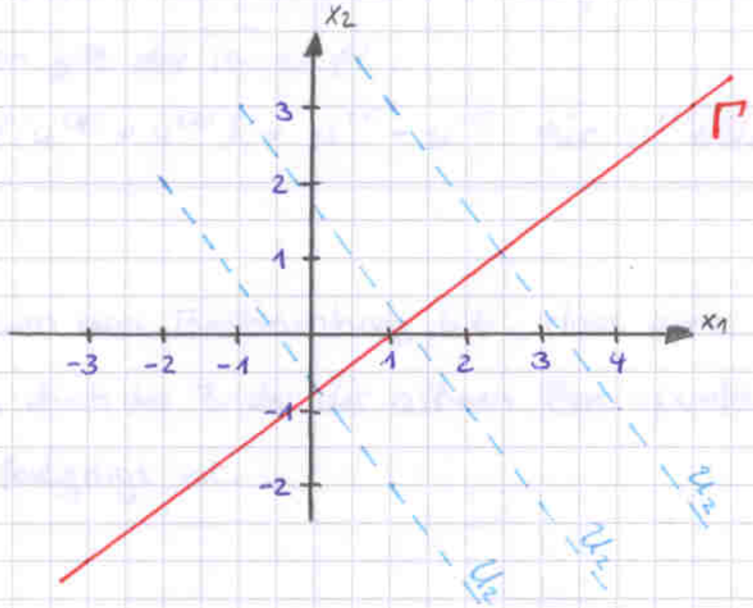
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -25/4 & 3/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 + 3/25\, Z_2 \\ Z_2 \to -4/25 \cdot Z_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4/25 \\ 0 & 1 & -3/25 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -4/25 \,, \quad \lambda_2 = -3/25$$

Dann lautet die gesuchte Matrixdarstellung:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 7/25 & 24/25 \\ 24/25 & -7/25 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 18/25 \\ -24/25 \end{pmatrix}$$



(b) in $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}}_{=: U_2}$ an der Ebene Δ

mit $\Delta = \text{Lös}([1 \;\; 1 \;\; -2], 2)$.

Wir suchen also eine affine Abb. f mit $f(x) = Ax + b \;\; \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen zunächst Lös ([1 1 -2], 2)

$$\text{Lös}([1 \;\; 1 \;\; -2], 2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1 \;\; 1 \;\; -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \right\}$$

$$(1 \;\; 1 \;\; -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \iff x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - x_2 + 2x_3 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Also ist $\text{Lös}([1 \;\; 1 \;\; -2], 2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: a} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}}_{=: U_1}$

Die Spiegelung f in $\mathbb{R}^3$ an Δ in Richtung U_2 ist dann erklärt durch die Vorschrift

$$f(p) = a + \ell(p-a) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}^3.$$

Außerdem gilt die Vorschrift:

$$\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)} - u^{(2)} \quad \text{für } u^{(1)} \in U_1, u^{(2)} \in U_2.$$

Wir wissen aus Beobachtung 6.6, dass eine affine Abbildung durch die Bilder der affinen Basispunkte vollständig festgelegt ist.

Bestimmen nun eine (geschickte) affine Basis von $\mathbb{R}^3$.

$\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ ist offentsichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:a^{(1)}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=:a^{(2)}}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:a^{(3)}}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}_{=:a^{(4)}}\right) \text{ ist eine affine Basis von } \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen nun die Bilder der affinen Basispunkte.

$$f(a^{(1)}) = f\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}}$$

$$f(a^{(2)}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}}$$

$$f(a^{(3)}) = f\left(\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}}}$$

$$f(a^{(4)}) = f\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\Big(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}}}$$

Dann ist $A = [f(a^{(2)}) - f(a^{(1)}), f(a^{(3)}) - f(a^{(1)}), f(a^{(4)}) - f(a^{(1)})]$

$$\cdot [a^{(2)} - a^{(1)}, a^{(3)} - a^{(1)}, a^{(4)} - a^{(1)}]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}-1 & -2 & 4\\ -4 & -3 & 8\\ -2 & -2 & 5\end{bmatrix}}}$$

(*) NR: Berechnung der Inversen

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}}_{=:B} \left| \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right.\right) \begin{matrix}Z_1 \to (-1) \cdot Z_1\\ Z_2 \to Z_2 + Z_1\\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{matrix} \left| \begin{matrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right.\right) \begin{matrix}Z_1 \to Z_1 + Z_2\\ Z_2 \to 1/2 \cdot Z_2\\ Z_3 \to Z_3 - 1/2 \cdot Z_2\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3/2\\ 0 & 0 & -1/2\end{matrix} \left| \begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & -1/2 & 1\end{matrix}\right.\right) \begin{matrix}Z_1 \to Z_1 + 4 \cdot Z_3\\ Z_2 \to Z_2 + 3 \cdot Z_3\\ Z_3 \to (-2) \cdot Z_3\end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{matrix}}_{=B^{-1}}\right.\right)$$

Dann ist $b = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(**)}{=} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \ell\Bigg(\underbrace{4\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_1} \underbrace{- 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2}\Bigg)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}}}$$

(**) <u>NR:</u> Berechne die Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, mit denen gilt:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$

<u>Dann gilt:</u> $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \to (-1)\cdot Z_1 \\ Z_2 \to Z_2 + Z_1 \\ \end{array}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 + Z_2 \\ Z_2 \to 1/2\cdot Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 - 1/2\cdot Z_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 + 4\cdot Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 3\cdot Z_3 \\ Z_3 \to (-2)\cdot Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$

<u>Dann lautet die Matrixdarstellung:</u>

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 8 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$$