EINZELABGABE von STEFANIE EHRING

DO 14-15 UHR

Aufgabe 18

a) Beh: Für zwei konj. affine Abb. $f: \Gamma \to \Gamma$, $g: \Delta \to \Delta$ sind die Fixräume Fix_f und Fix_g affin äquivalent.

Beweis: Es seien $f: \Gamma \to \Gamma$ und $g: \Delta \to \Delta$ zwei affine konj. Abbildungen. D.h. es gibt eine Affinität $h: \Gamma \to \Delta$, sodass

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

bzw $h \circ f = g \circ h$ $(*)$

Nach Def 6.19 sind zwei Mengen genau dann affin äquivalent, wenn es eine Affinität k gibt, sodass $k(M) = N$.

Setze $h = k$. Zu zeigen ist nun, dass $h(Fix_f) = Fix_g$

"$\subseteq$":

Es sei $p \in Fix_f = \{x \in \Gamma \mid f(x) = x\} \subseteq \Gamma$.

Es gilt nun $h(p) = h(f(p)) \overset{*}{=} g(h(p))$

und somit ist $h(p) \in Fix_g = \{x \in \Delta \mid g(x) = x\} \subseteq \Delta$

Da $p \in Fix_f$ beliebig, ist somit "$\subseteq$" gezeigt.

"$\supseteq$":

Analog zu "$\subseteq$" kann mit der Affinität h^{-1} gezeigt werden, dass $h^{-1}(Fix_g) \subseteq Fix_f$ gilt. Damit gilt auch:

$$Fix_g \subseteq h(Fix_f).$$

Insgesamt sind diese Mengen damit gleich und die Fixräume affin äquivalent. ✓

b) Beh: Die Mengen M und N sind affin äquivalent mit $M = \{\underset{m_1}{\binom{1}{1}}, \underset{m_2}{\binom{2}{2}}, \underset{m_3}{\binom{3}{3}}, \underset{m_4}{\binom{4}{2}}, \underset{m_5}{\binom{5}{1}}\}$, $N = \{\underset{n_1}{\binom{0}{0}}, \underset{n_2}{\binom{1}{-2}}, \underset{n_3}{\binom{2}{-4}}, \underset{n_4}{\binom{3}{-1}}, \underset{n_5}{\binom{6}{-2}}\}$

Beweis:

Nach 6.19 sind zwei Mengen M und N genau dann affin äquivalent, wenn es eine Affinität h gibt, sodass

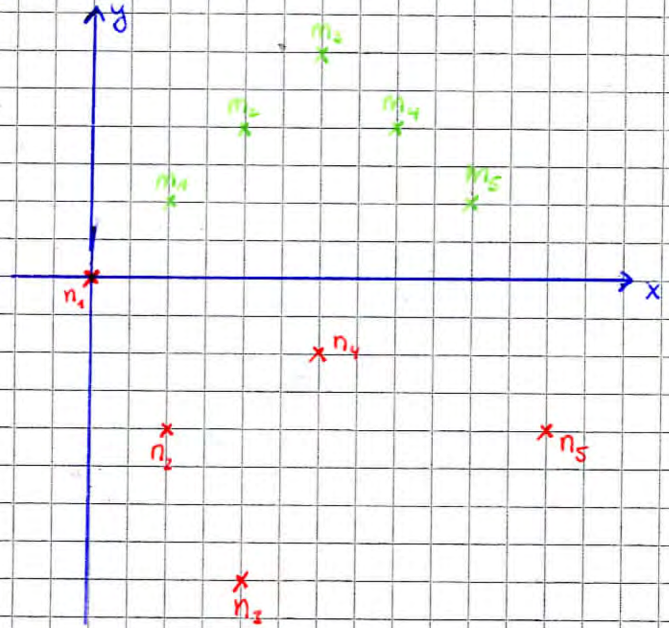
$$M = h(N)$$

Dementsprechend ist eine solche Affinität zu bestimmen:
Hierfür ist bekannt, dass

i) Affinitäten affin (un-)abhängige Pkte auf affin (un-)abhängige Pkte abbilden (Satz 6.4)

ii) Affinitäten die Lagebeziehung eines Pktes d zu drei affin unabhängigen Pkten erhalten. (Folgerung aus Satz 6.2c))

Skizze



Warum mit der bis zu diesem Zeitpunkt noch gar nicht eingeführten "Dreiecksfläche" argumentieren?

(Drei Punkte a, b und c sind im $\mathbb{R}^2$ affin unabhängig, wenn die Fläche des Dreiecks mit den Eckpkten a, b und c tatsächlich existiert, d.h größer Null ist.)

Affinitäten erhalten Kollinearität (oder: bilden Geraden auf Geraden ab), deswegen

~~Demnach~~ muss

$$[h(\{n_1, n_2, n_3\}) = \{m_1, m_2, m_3\} \text{ oder } h(\{n_1, n_2, n_3\}) = \{m_3, m_4, m_5\}]$$

und $[h(\{n_1, n_4, n_5\}) = \{m_1, m_2, m_3\}$ oder $h(\{n_1, n_4, n_5\}) = \{m_3, m_4, m_5\}]$

gelten, damit i) erfüllt werden kann.

Damit dies wiederum gelten kann, muss $h(n_1) = m_3$, d.h. $h(\binom{0}{0}) = \binom{3}{3}$ gelten.

~~Damit die gesuchte Affinität h auch ii) erfüllt~~

Alle weiteren Pkte werden folgenden Überlegungen folgend einander zugeordnet:

(*) Angenommen $h(\{n_1, n_2, n_3\}) = \{m_1, m_2, m_3\}$, so muss $h(\{n_1, n_4, n_5\}) = \{m_3, m_4, m_5\}$ gelten, damit $h(N) = M$ ist.

Nun gilt bereits $h(n_1) = m_3$. Würde nun $h(n_2) = m_1$ gelten, so würde die Affinität h die Lagebeziehung des Pktes n_3 zu den Pkten n_1, n_2 und n_4 nicht erhalten können (unabhängig von der Wahl des Bildpktes von n_4) und somit ii) wiedersprechen.

Somit muss $h(n_2) = m_2$ und $h(n_3) = m_1$ gelten.

Analog zur vorangegangener Überlegung muss ~~$h(n_4$~~ (nach wie vor von (*) ausgehend) $h(n_4) = m_4$ und $h(n_5) = m_5$ gelten.

Betrachte also die Abbildung $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$h(x) = h(0) + A \cdot (x - 0)$$

$$\text{mit } h(0) = \binom{3}{3} \quad \text{und } h(n_2) = h\binom{1}{-2} = \binom{2}{2} = m_2$$

$$\text{und } h(n_4) = h\binom{3}{-1} = \binom{4}{2} = m_4$$

Da $n_1 = 0$ hier nicht richtig i.A. nicht.

Da n_2 und n_4 linear unabhängig sind, sind n_1, n_2 und n_4 affin unabhängig, sodass deren Bildpkte die affine Abbildung h vollständig bestimmen (nach 6.6).

Bestimmung einer Matrixdarstellung für h:

$$h(x) = h(0) + A \cdot x \quad \text{und somit ist } A \cdot x = h(x) - h(0)$$

Mit $h(n_1) = m_3$, $h(n_2) = m_1$ und $h(n_4) = m_4$ gilt somit:

$$A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{=: B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Durch Multiplikation von rechts mit $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ gilt:

$$A\cdot B\cdot B^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

und somit kann h angegeben werden:

$$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$h(x) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot x$$

Diese Abbildung ist tatsächlich eine Affinität, da h nach Beob. 6.13 affin ist und h bijektiv ist, da A invertierbar ist (da $\det(A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{5} = \frac{10}{25} \neq 0$ ist)

Probe ob $h(N) = M$:

$$h(n_1) = h\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = m_3 \in M$$

$$h(n_2) = h\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = m_2 \in M$$

$$h(n_3) = h\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = m_1 \in M$$

$$h(n_4) = h\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = m_4 \in M$$

$$h(n_5) = h\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = m_5 \in M$$

Es gilt somit $h(N) = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\} = M$ mit der Affinität h.

Nach 6.19 sind M und N damit affin äquivalent.

sehr schön! Finde ich auch. Se.

5/5