Geometrie - Aufgabe 1a

Pascal Wienerslage

→ Knafla

Behauptung:

Eine Teilmenge g von K^2, K ein Körper, ist genau dann eine Gerade, wenn mit geeigneten $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$, $b \in K$ gilt:

$$g = \text{Lös}(A,b) \quad (= \{x \in K^2 : Ax = b\}).$$

Beweis:

„⇒": Sei g eine Gerade mit $g = a + Kv$, $a, v \in K^2$, $v \neq 0$.

zu zeigen: $g = \text{Lös}(A,b)$ mit geeigneten $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$, $b \in K$.

Beweis:

Zuallererst betrachten wir $\text{Lös}({}^t v, 0) = \text{Lös}([v_1\ v_2], 0)$

$$= \{x \in K^2 : v_1 x_1 + v_2 x_2 = 0\}.$$

Setze $w := \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$, dann ist

$\text{Lös}({}^t v, 0) = Kw$, denn

ein Kommentar, warum die Dimension hier 1 sein muss wäre schön gewesen!

$$v_1(\lambda(-v_2)) + v_2(\lambda v_1) = \lambda(-v_1 v_2) + \lambda(v_1 v_2) = \lambda(-v_1 v_2 + v_1 v_2) = 0 \ \forall \lambda \in K.$$

Nun setze $A := {}^t w = [-v_2\ v_1]$ und

setze $b := {}^t w a = [-v_2\ v_1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -v_2 a_1 + v_1 a_2$.

Dann ist $\text{Lös}(A,0) = \text{Lös}([-v_2\ v_1], 0) = Kv$, s.o. denn

$$-v_2(\lambda v_1) + v_1(\lambda v_2) = \lambda(-v_1 v_2) + \lambda(v_1 v_2) = \lambda(-v_1 v_2 + v_1 v_2) = 0 \ \forall \lambda \in K.$$

Also:

$$g = a + Kv = a + \text{Lös}(A,0) \text{ mit } A = [-v_2\ v_1].$$

$\cancel{= \text{Lös}(A,b)}$

Weiter gilt:

$$a \in \mathcal{L}ös(A,b) = \mathcal{L}ös\left(\left[-v_2\ v_1\right], -v_2a_1 + v_1a_2\right),$$

da $-v_2a_1 + v_1a_2 = -v_2a_1 + v_1a_2$ ✓.

Somit folgt:

$$g = a + Kv = a + \mathcal{L}ös(A,0) \overset{a \in \mathcal{L}ös(A,b)}{=} \mathcal{L}ös(A,b)$$

mit A, b wie oben definiert ■ ✓

„$\Leftarrow$": Sei $g = \mathcal{L}ös(A,b)$ mit $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$, $b \in K$.

zu zeigen: g ist eine Gerade

Beweis:

Zuallererst wird gezeigt, dass $\mathcal{L}ös(A,b) \neq \emptyset$ mit $A \neq 0$.

Sei also $A = [a_1\ a_2]$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, $a_1, a_2 \in K$.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1. Fall: $A = [0\ a_2]$ mit $a_2 \neq 0$.

Dann gilt:

$\mathcal{L}ös(A,b) = \{x \in K^2 : a_2x_2 = b\}$

Setze $c := \begin{bmatrix} \lambda \\ \frac{b}{a_2} \end{bmatrix}$, dann ist $c \in \mathcal{L}ös(A,b)$ $\forall \lambda \in K$.

2. Fall: $A = [a_1\ 0]$ mit $a_1 \neq 0$.

Hier ist $d := \begin{bmatrix} \frac{b}{a_1} \\ \mu \end{bmatrix} \in \mathcal{L}ös(A,b)$ $\forall \mu \in K$.

3. Fall: $A = [a_1\ a_2]$ mit $a_1, a_2 \neq 0$.

etwa

Hier ist $e := \begin{bmatrix} \frac{b - a_2x_2}{a_1} \\ \frac{b - a_1x_1}{a_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}ös(A,b)$.

$$A \cdot e = a_1\left(\frac{b - a_2x_2}{a_1}\right) + a_2\left(\frac{b - a_1x_1}{a_2}\right)$$

$$= b - a_2x_2 + b - a_1x_1 \overset{???}{=} b\ ???$$

Also: $\mathcal{L}ös(A,b) \neq \emptyset$ mit $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$, $b \in K$.

etwa e wählen als

$$e = \begin{pmatrix} \frac{b}{2a_1} \\ \frac{b}{2a_2} \end{pmatrix}$$

Wieder betrachten wir $A = [a_1 \; a_2]$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, $a_1, a_2 \in K$, um Rang A zu bestimmen.

Auch hier unterscheiden wir 3 Fälle:

1. Fall: $A = [0 \; a_2]$ mit $a_2 \neq 0$.

Hier gilt: $\dim(SR) = \dim(ZR) = \text{Rang}(A) = 1$.

2. Fall: $A = [a_1 \; 0]$ mit $a_1 \neq 0$.

Auch hier gilt: $\text{Rang}(A) = 1$.

3. Fall:

$A = [a_1 \; a_2]$ mit $a_1, a_2 \neq 0$.

Hier gilt:

$$[a_1 \; a_2] \overset{\text{Division mit } a_1}{\Longleftrightarrow} \left[1 \; \frac{a_2}{a_1}\right] \overset{Sp.2 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot Sp.1}{\Longleftrightarrow} [1 \; 0].$$

Also auch hier ist $\text{Rang}(A) = 1$.

Weiter gilt:

$$\dim_K \text{Lös}(A,0) = \dim_K K^2 - \text{Rang}(A) = 2 - 1 = 1.$$

Sei etwa $\text{Lös}(A,0) = Kn$ mit $n \neq 0$, $n \in K^2$.

Desweiteren gilt:

$$\text{Lös}(A,b) = a + \text{Lös}(A,0) \text{ mit beliebiger Lösung } a \in \text{Lös}(A,b).$$

Da nun $\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset$, existiert ein solches $a \in \text{Lös}(A,b)$, $a \in K^2$.

Es folgt:

$$g = \text{Lös}(A,b) = a + \text{Lös}(A,0) = a + Kn \quad \text{mit } a, n \in K^2, n \neq 0.$$

Somit ist g eine Gerade per Definition ∎

Die Behauptung ist somit bewiesen. Sehr ausführlich ~~aber~~ und richtig!

4/5