(a) Beweisen Sie Beobachtung 9 in §1.

Beweis:

"$\Rightarrow$"

Sei $g = a + Kv,\ a,v \in K^2, v \neq 0$. Sei weiter ${}^t v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \tilde{A} \in K^{1\times 2}$.

Es ist also $rg(\tilde{A}) = rg(v_1 \quad v_2) = 1$, weil $v \neq 0$. Da $rg(\tilde{A}) = rg(\tilde{A} \mid 0)$, folgt mit Satz 4.5 (c), dass $Lös(\tilde{A},0) \neq \emptyset$ und mit der Dimensionsformel aus Satz 4.5 (b), dass $\dim_K Lös(\tilde{A},0) = n - rg(\tilde{A}) = 2 - 1 = 1$.

Also existiert ein $w \in K^2, w \neq 0$ so, dass $Lös(\tilde{A},0) = Kw$ (∗).

Setze $A := {}^t w$ und $b := {}^t w \cdot a$.

Dann gilt $Aa = b$, d.h. $a \in Lös(A,b)$ ist spezielle Lösung von $Ax = b$.

Weiter gilt für alle $\lambda \in K$, dass

$A(\lambda v) = \lambda \cdot {}^t w \cdot v = \lambda \cdot (w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2) = \lambda \cdot {}^t v \cdot w = \tilde{A} \cdot \lambda w = 0$ nach (∗). D.h. $v \in Lös(A,0) = Kv$. Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen LGS gefunden.

Damit folgt nun nach Satz 4.5 (a), dass $Lös(A,b) = a + Lös(A,0) = a + Kv = g$.

"$\Leftarrow$"

Sei $g = Lös(A,b)$ mit $A \in K^{1\times 2}, A \neq 0$.

Dann ist $rg(A) = 1$. D.h. $Lös(A,0) \neq 0$ nach Satz 4.5 (c) und mit Satz 4.5 (b) folgt $\dim_K Lös(A,0) = n - rg(A) = 2 - 1 = 1$.

Es gilt also $Lös(A,0) = Kv$ mit $0 \neq v \in K^2$.

Dann gibt es nach Satz 4.5 (a) ein $a \in K^2$ mit $Lös(A,b) = a + Lös(A,0) = a + Kv = g$.

(b) Mit $(r,s),(r',s') \in K^2 \setminus \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$ und $c,c' \in K$ seien $g = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in K^2 : rx + sy = c\right\}$ und

$g' = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in K^2 : r'x + s'y = c'\right\}$.

Zeigen Sie :

$g \cap g' = \emptyset \Leftrightarrow \left[(r,s),(r',s')\ l.a.\ über\ K\ \underline{und}\ (r,s,c),(r',s',c')\ l.u.\ über\ K\right]$

Beweis:

Das Lineare Gleichungssystem bestehend aus den beiden Gleichungen $rx + sy = c$ und $r'x + s'y = c'$ ist genau dann lösbar, wenn die Geraden g und g' gemeinsame Punkte haben.

Es gilt also $g \cap g' = Lös(A,b)$ mit $A = \begin{bmatrix} r & s \\ r' & s' \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$.

$\underline{"\Rightarrow"}$

Sei $g \cap g' = Lös(A,b) = \emptyset$.

Der Rang von A, also der Rang des Zeilenraumes, kann in diesem Fall, da nur zwei Zeilen existieren, nur 0, 1 oder 2 sein. 0 ist jedoch nicht möglich, da in der Voraussetzung $(r,s),(r',s') \neq 0$ sind. Da nach Satz 4.5 (c) $rg(A \mid b) \neq rg(A)$ gelten muss, folgt mit $rg(A \mid b) \geq rg(A)$, dass $2 = rg\left(\left[\begin{array}{cc|c} r & s & c \\ r' & s' & c' \end{array}\right]\right) > rg\left(\begin{bmatrix} r & s \\ r' & s' \end{bmatrix}\right) = 1$. Also sind $(r,s,c),(r',s',c')$ linear unabhängig <u>und</u> $(r,s),(r',s')$ linear abhängig.

$\underline{"\Leftarrow"}$

Seien $(r,s,c),(r',s',c')$ linear unabhängig <u>und</u> $(r,s),(r',s')$ linear abhängig.

Dann ist $rg(A \mid b) = 2$ <u>und</u> $rg(A) = 1$.

Also gilt $2 = rg\left(\left[\begin{array}{cc|c} r & s & c \\ r' & s' & c' \end{array}\right]\right) > rg\left(\begin{bmatrix} r & s \\ r' & s' \end{bmatrix}\right) = 1$.

Dann ist nach Satz 4.5 (c)das LGS $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$ nicht lösbar, d.h.

$\emptyset = Lös(A,b) = g \cap g'$.