Geometrie 2010/2011

Ausarbeitung einer Musterlösung zu Aufgabe 22

Alexander Eik

Abgabe: 17.Januar 2011

Aufgabe 22:
(a) **Abstand zweier Geraden in** $\mathbb{R}^4$

Seien

$$\Gamma = v + < u >_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \text{ und } \Gamma' = v' + < u' >_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

Geraden in $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden bezüglich des Standardskalarproduktes.

Lösung der Aufgabe:
Schritt 1: Prüfe, ob $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$. Falls nein, würden sich die Geraden schneiden, die Aufgabe wäre gelöst und der Abstand wäre 0. Seien also $A := [u, v]$ und $b := v - v'$. Prüfe, ob $Lös(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = b\} = \emptyset$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

In der letzten Zeile ist durch diese Umformung ein Widerspruch aufgetreten und das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Damit ist gezeigt, dass $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$, automatisch bedeutet dies, dass der Abstand größer als 0 sein muss. Wenn man nun zur Hilfsebene $\Delta = v + \underbrace{< u, u' >_{\mathbb{R}}}_{=:W}$ die Ebene $\Delta' = v' + W$ aufstellt, so liegt Γ in Δ und Γ' in Δ', zusätzlich sind somit die Ebenen Δ und Δ' parallel im $\mathbb{R}^4$ aufgrund der gemeinsamen Richtung. Um den Abstand zwischen Γ und Γ' berechnen zu können, wird eine Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten $p \in \Delta$ und $q \in \Delta'$ benötigt. Dabei müssen die Punkte p und q so gewählt werden, dass der Abstand minimal wird. Hierfür muss die Verbindungsgerade orthogonal zu Γ und Γ' sein. Diese liegt im Orthogonalraum und p und q sind die Schnittpunkte der Orthogonalen und den zwei Ebenen. Der Abstand $d(p,q)$ gibt also den Abstand zwischen den zwei Hilfsebenen an, also auch den Abstand zwische den Geraden.

Schritt 2: Bestimme den Orthogonalraum zu Γ und Γ'. Mit $W =< u, u' >_{\mathbb{R}}$ bilde nun $W^{\perp} = \left\{ w \in \mathbb{R}^4 : {}^t uw = 0 \text{ und } {}^t u' w = 0 \right\}$. Bestimme $Lös(B, 0)$ mit $B \in \mathbb{R}^{2x4}$ mit ${}^t u$ und ${}^t u'$ als Zeilen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{II}]{\text{I}+\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Da $dimW = 2$ (u und u' sind linear unabhängig) und weiter $dimW + dimW^{\perp} = 4$ gelten muss ($W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^4$), ist $dimW^{\perp} = 2$. Finde zwei linear unabhängige Vektoren (bzw. Richtungen) in $W^{\perp}$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Orthogonalraum $W^{\perp}$ schneidet die zwei Ebenen senkrecht, enthält also auch die kürzeste Verbindungsgerade zwischen den zwei Ebenen. Wähle nun den Schnittpunkt q als den Aufpunkt v' und sei $H := v' + W^{\perp}$.

Schritt 3: Bestimme den Durchstoßpunkt von H und Δ mit einem Gleichungssystem, dessen Spalten sich aus $w_1, w_2, u, u', v - v'$ zusammensetzen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{IV}+\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ordnen}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}-\frac{1}{2}\text{IV},\ \text{III}-\frac{1}{2}\text{IV}]{\text{I}+\frac{1}{2}\text{IV}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{II}-\frac{3}{5}\text{III}]{\text{I}+\frac{1}{5}\text{III}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{normieren}]{\text{I}+\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Also ist $L\ddot{o}s([w_1, w_2, u, u'], v-v') = \left\{y \in \mathbb{R}^4 : [w_1, w_2, u, u'] \cdot y = v - v'\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\}$.

Berechne nun den Durchstoßpunkt p:

$$p = v' + 0 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Bestimme den Abstand von v' und p mit dem Standardskalarprodukt:

$$d(v', p) = \left\|v' - p\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}.$$

$\square$

(b) **Abstand zweier Ebenen in** $\mathbb{R}^5$

Seien

$$\Delta := u + < u_1, u_2 >_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \text{ und}$$

$$\Delta' := w + < w_1, w_2 >_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

Ebenen in $\mathbb{R}^5$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen bezüglich des Standardskalarproduktes.

Lösung der Aufgabe: Das Verfahren ist dem in Aufgabenteil (a) sehr ähnlich.
Schritt 1: Prüfe, ob $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$. Falls nein, wäre der Abstand 0 und die Aufgabe gelöst. Seien also $A := [u_1, u_2, w_1, w_2]$ und $b := u - w$. Prüfe, ob $L\ddot{o}s(A, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b\right\} = \emptyset$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{V}-\text{IV}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{III}+3\text{V}]{\text{II}+\text{V}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

Man sieht nun durch den Widerspruch in der dritten Zeile, dass das LGS nicht lösbar ist und damit gilt: $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$. Verfahre nun zum Bestimmen eines Abstandes $d(p, q)$ ähnlich wie in Aufgabe 22 (a):

Schritt 2: Bestimme den Orthogonalraum zu Δ und Δ'. Hierfür sei $U =< u_1, u_2, w_1, w_2 >_{\mathbb{R}}$ und $U^{\perp} = \left\{y \in \mathbb{R}^5 : {}^t u_1 y = 0,\ {}^t u_2 y = 0,\ {}^t w_1 y = 0,\ \text{und } {}^t w_2 y = 0\right\}$. Bestimme $Lös(B, 0)$ mit $B \in \mathbb{R}^{4x5}$ mit ${}^t u_1, {}^t u_2, {}^t w_1, {}^t w_2$ als Zeilen.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-2\text{I, IV}+3\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ordnen}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}+\text{IV, III}-4\text{IV}]{\text{I}-\text{IV}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II}+\text{III}]{\text{I}-\frac{1}{3}\text{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{normieren}]{\text{I}+\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Der Rang der Matrix ist voll, damit sind alle Vektoren in U linear unabhängig, also ist

$dimU = 4$ (Hyperebene) und damit $dimU^\perp = 1$. Das Ablesen der Lösung ergibt:

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also ist } U^\perp =< \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

Seien nun $\Gamma = u + U$ und $\Gamma' = w + U$. Für den Abstand $d(p, q)$ zwischen den zwei Ebenen werden $p \in \Gamma$ und $q \in \Gamma'$ benötigt. Setze hierfür $q =: w$.

Schritt 3: Bestimme den Durchstoßpunkt von Γ und $G = w + U^\perp$ mit einem Gleichungssystem mit den Spalten $u_1, u_2, w_1, w_2, -y, w - u$ in der Matrix.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{III, IV}-\text{V}]{\text{I}-\text{V, II} \leftrightarrow \text{V}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{IV+III, V+III}]{\text{I}-2\text{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 11/3 & -2/3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{IV+V, (-1)V}]{\text{II+V, III}-2\text{V}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11/3 & 2/3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{V}-\text{IV}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{11}\text{V}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -23/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/11 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}+\frac{23}{3}\text{V, IV}-\frac{22}{3}\text{V}]{\text{I}+\frac{1}{3}\text{V, II}-\frac{8}{3}\text{V}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25/33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 35/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -47/33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/11 \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix liefert als Lösung:

$$Lös([u_1, u_2, w_1, w_2, -y], w - u) = \left\{ v \in \mathbb{R}^5 : [u_1, u_2, w_1, w_2, -y] \cdot v = w - u \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -25/33 \\ 35/33 \\ -47/33 \\ -1/3 \\ -3/11 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechne den Durchstoßpunkt p:

$$p = w + \frac{-3}{11} \cdot y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-3}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/11 \\ 6/11 \\ 8/11 \\ 3/11 \\ 8/11 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Bestimme schließlich den Abstand von w und p mit dem Standardskalarprodukt:

$$d(w,p) = \|w - p\| = \left\| \begin{pmatrix} 6/11 \\ -6/11 \\ 3/11 \\ -3/11 \\ 3/11 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36+36+9+9+9}{121}} = \sqrt{\frac{99}{121}} = \sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

$\square$