Einzelabgabe von Marian Schlüter, Do $14^{\underline{00}}-15^{\underline{00}}$

Aufgabe 26: Drehungen, elementare Drehungen und Spiegelungen

a) Zeigen Sie indem Sie die Drehachse und den Drehwinkel bestimmen: Die lineare Abbildung ℓ_A mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{125} & \frac{116}{125} \\ -\frac{12}{25} & \frac{109}{125} & \frac{12}{125} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} =:a^{(1)} & =:a^{(2)} & =:a^{(3)} \end{array}$$

ist eine Drehung.

Beweis:

A ist orthonormiert, da die Spalten von A orthogonal zueinander sind. Es gilt:

$((a^{(1)}, a^{(2)})) = ((a^{(1)}, a^{(3)})) = ((a^{(2)}, a^{(3)})) = 0$

Außerdem sind die Längen der Spalten von A jeweils 1.

$\operatorname{norm}(a_1) = \operatorname{norm}(a_2) = \operatorname{norm}(a_3) = 1$

Nun wird die Drehachse (Fixgerade) bestimmt:

Dazu wird $\text{Lös}(A-E,0)$ bestimmt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{16}{25} & \frac{12}{125} & \frac{116}{125} & 0 \\ -\frac{12}{25} & -\frac{16}{125} & \frac{12}{125} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & -\frac{16}{25} & 0 \end{array}\right] \overset{\text{EZU}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Daraus kann $\text{Lös}(A-E,0)$ abgelesen werden als:

$$\text{Lös}(A-E,0) = \underbrace{\left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in K \right\}}_{=:\langle e \rangle_K}$$

Lös$(A-E, 0)$ entspricht der Drehachse.

Um den Drehwinkel zu bestimmen, muss zunächst $e^\perp$ bestimmt werden. Man erkennt durch „scharfes Hinsehen", dass eine mögliche Lösung für $e^\perp$, folgende ist:

$$e^\perp = \langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{:=w_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{:=w_2} \rangle_K$$

Durch das Gram-Schmidt-Verfahren wird $e^\perp$ noch orthogonalisiert, da $((w_1, w_2)) = -3$

Setze $u^{(1)} := w^{(1)}$

$$u^{(2)} = w^{(2)} - \frac{((w_2^{(2)}, u^{(1)}))}{\| u^{(1)} \|} u^{(1)}$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Also: $e^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \rangle_K$

Mit e und $e^\perp$ kann nun eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu muss noch durch die Länge der einzelnen Vektoren geteilt werden.

Sei $P = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$.

da Sie nirgends ankündigen, dass Sie einen Basiswechsel vorhaben, um die geom. Eigenschf. von l_A sichtbar zu machen. Ist hier für einen Leser/Zuhörer nicht mehr nachvollziehbar, was passiert.

Also: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{11} \\ 0 & 2/\sqrt{22} & 3/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$

Um den Drehwinkel zu bestimmen, muss nun ${}^tPAP$ (Basiswechsel) berechnet werden.

Bestimme ${}^tP$:

bestimmen Sie immer die Transponierte einer Matrix auf diese Weise ??

$$\left[\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{11} \\ 0 & 2/\sqrt{22} & 3/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{11} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{EZU}{\leadsto} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{22} & \frac{\sqrt{22}}{11} & 3/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{11} \end{array}\right]$$

umständl.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{22} & \frac{\sqrt{22}}{11} & 3/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{11} \end{bmatrix}}_{:= {}^tP}$$

Damit ist
$${}^tPAP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & \\ \| & \| & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 37/125 & \frac{36\cdot\sqrt{11}}{125} & 0 \\ \frac{-36\sqrt{11}}{125} & \frac{37}{125} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

${}^tPAP$ hat die typische Form einer Drehmatrix.

Der Drehwinkel von A beträgt:

$\arccos\left(\frac{37}{125}\right) \approx 72{,}78°$ ✓

b) Stellen Sie die Drehung ℓ_A durch elementare Drehungen dar.

Da A orthonormiert ist und $\det A = 1$, gilt nach Satz 7.12, dass A ein Produkt aus elementaren Drehmatrizen ist.

~~Da gilt $\det(A) = 1$~~ Im vorliegenden Fall, ist $A = D_1 \cdot \ldots \cdot D_r$ mit elementaren Drehmatrizen $D_1, \ldots, D_r$ und $1 \leq r \leq 3$.

Berechnung der Drehmatrizen:

Konstruiere D_1' so, dass ~~es~~ durch die elementare Drehung $\ell_{D_1'}$ der 3×1 Eintrag „ausgeräumt" wird.

$$D_1'(3,1;a_1,b_1) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} \overset{c_1}{\frac{9}{25}} & \frac{12}{125} & \frac{116}{125} \\ -\frac{12}{25} & \frac{109}{125} & \frac{12}{125} \\ \underset{d_1}{-\frac{4}{5}} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

~~Aus~~ Einem Beispiel der VL folgend setze ich:

$$a_1 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}} = \frac{9}{\sqrt{481}}$$

$$b_1 = \frac{d_1}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}} = \frac{-20}{\sqrt{481}}$$

$$\text{Also: } D_1' = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{481}} & 0 & -\frac{20}{\sqrt{481}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{20}{\sqrt{481}} & 0 & \frac{9}{\sqrt{481}} \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich damit:

$$D_1' \cdot A = \begin{bmatrix} \overset{c_2}{\frac{\sqrt{481}}{25}} & * & * \\ \underset{d_2}{-\frac{12}{25}} & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Die „$*$"-Einträge sind nicht direkt relevant für die weitere Berechnung.

Sei nun analog

$$D_2'(2,1;a_2,b_2) = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ -b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$a_2 = \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2+d_2^2}} = \frac{\sqrt{481}}{25} \; ; \; b_2 = \frac{d_2}{\sqrt{c_2^2+d_2^2}} = -\frac{12}{25} .$$

Dann ~~Es~~ ergibt sich:

$$D_2' \cdot D_1' \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{109\sqrt{481}}{2405} & \frac{12\cdot\sqrt{481}}{2405} \\ 0 & \frac{-12\cdot\sqrt{481}}{2405} & \frac{109\cdot\sqrt{481}}{2405} \end{bmatrix}$$

Schließlich sei

$$D_3'(3,2;a_3,b_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & -b_3 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$a_3 = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2+d_3^2}} = \frac{109\cdot\sqrt{481}}{2405}$$

$$b_3 = \frac{d_3}{\sqrt{c_3^2+d_3^2}} = -\frac{12\sqrt{481}}{2405} .$$

Es gilt damit

$$D_3' \cdot D_2' \cdot D_1' \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und somit}$$

$$A = \underbrace{D_1'^{-1}}_{=:D_1} \cdot \underbrace{D_2'^{-1}}_{=:D_2} \cdot \underbrace{D_3'^{-1}}_{=:D_3} .$$

Da D_1, D_2, D_3 Drehmatrizen sind, gilt für ihre Inversen:

$$D_1 := D_1'^{-1}(3,1;a_1,-b_1) = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{481}} & 0 & \frac{20}{\sqrt{481}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{20}{\sqrt{481}} & 0 & \frac{9}{\sqrt{481}} \end{bmatrix}$$

$$D_2 := D_2'^{-1}(2,1;\, a_2, -b_2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{481}}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{\sqrt{481}}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

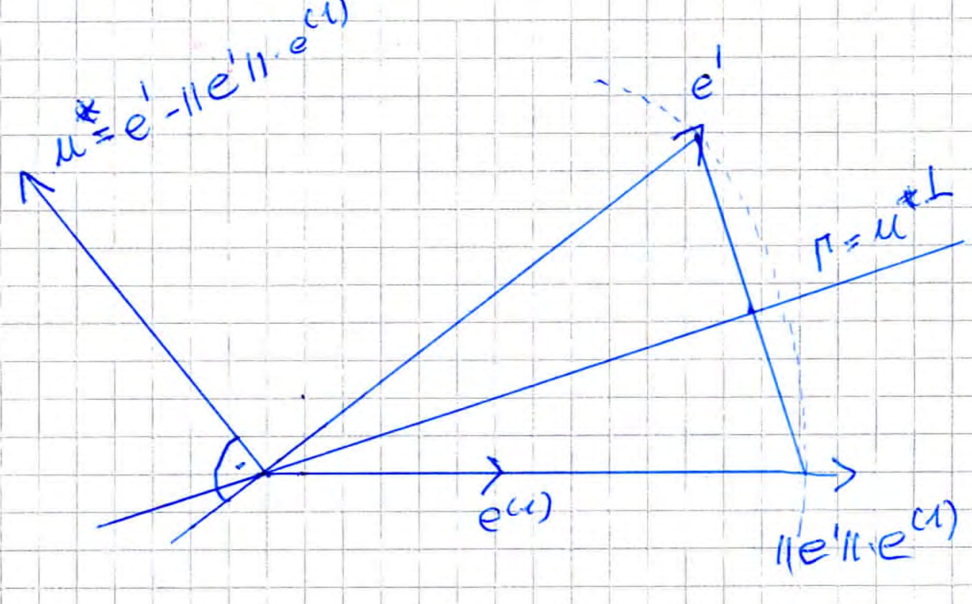
$$D_3 := D_3'^{-1}(3,2;\, a_3, -b_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{109\cdot\sqrt{481}}{2405} & \frac{12\cdot\sqrt{481}}{2405} \\ 0 & -\frac{12\sqrt{481}}{2405} & \frac{109\cdot\sqrt{481}}{2405} \end{bmatrix}$$

D_1, D_2, D_3 sind auch Drehungen und es gilt

$A = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$ ✓

(c) Stellen Sie die Drehung ℓ_A dar als Hintereinanderausführung von 2 orthogonalen Spiegelungen an Ebenen.

Zur Veranschaulichung wird der allgemeine Fall betrachtet:



Im Konketen Fall sei $e = a_1 = \begin{pmatrix} 9/25 \\ -\frac{12}{25} \\ -4/5 \end{pmatrix}$

$$u^* = e - \|e\| \cdot e^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{25} \\ -\frac{12}{25} \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

Die erste Spiegelungsmatrix B_1 lässt sich nach Beispiel 7.9 (1) Formel (2) berechnen:

$$B_1 = E - \frac{2}{\|u^*\|^2} u^* \cdot {}^t u^* = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{18}{25} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$B_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Da ℓ_A als Hintereinanderausführung von $\underline{\underline{2}}$ orthogonalen Spiegelungen an Ebenen (auch Satz 7.12) dargestellt werden soll, gilt:

$$B_2 \cdot B_1 \cdot A = E \quad \Leftrightarrow \quad B_1 \cdot A = B_2^{-1}$$

Also ist $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

Gute Idee, aber: ist $\ell_{B_2^{-1}}$ eine orthogonale Spiegelung?

Spiegelungen sind zu sich selbst Invers, deshalb gilt außerdem:

$B_1 = B_1^{-1}$ und $B_2 = B_2^{-1}$ ✓

$B_2 \cdot B_1 \cdot A = E$ kann man also umformen in

$A = B_1^{-1} \cdot B_2^{-1} \cdot E = B_1 \cdot B_2$

Insgesamt sehr schöne und korrekte Bearbeitung mit nur wenigen kleineren Schwächen bei der Darstellung.

5/5