Geometrie - Aufgabenblatt 13

Stefanie Ehring, Nadine Fabian

Aufg. 34)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 x_2 - 1$ und sei $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f'\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_2 - x_1^2$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Zudem seien G_f, $G_{f'}$ die Nullstellenmengen von f, f' mit $G_f = V_2(x_1 x_2 - 1) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 - 1 = 0 \right\}$ und

$G_{f'} = V_2(x_2 - x_1^2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1^2 = 0 \right\}$.

Weiter seien M, M' zwei weitere Nullstellenmengen im $\mathbb{R}^3$ mit $M = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 x_2 = x_3^2 \right\}$ und $M' = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2 x_3 = x_1^2 \right\}$

a)

Sei ε die Standardeinbettung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

$H := \varepsilon(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 \right\}$

Behauptung: I) $\varepsilon(G_f) = M \cap H$

II) $\varepsilon(G_{f'}) = M' \cap H$

Beweis:

I) $\varepsilon(G_f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 1, x_3 = 1 \right\}$

$$M \cap H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = x_3^2 \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = x_3^2, x_3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 1, x_3 = 1 \right\} = \varepsilon(G_f)$$ ✓

II) $\mathcal{E}(G_{f'}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_1^2, x_3 = 1 \right\}$

$$M' \cap H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 x_3 = x_1^2 \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 x_3 = x_1^2, \ x_3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_1^2, x_3 = 1 \right\} = \mathcal{E}(G_{f'}) \quad ✓$$

b) Sei $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, P elementare Drehmatrix.

<u>Behauptung</u>: $PM = M'$

<u>Beweis</u>: Sei $x \in M$ mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ und $x_1 x_2 = x_3^2$.

Dann ist $P \cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} := y$ mit $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Es gilt nun $y_2 \cdot y_3 = x_2 \cdot x_1 = x_3^2 = (-x_3)^2 = y_1^2$.

Damit ist $y \in M'$. // Gezeigt ist damit $PM \subseteq M'$.
Rückrichtung (genauso elementar) fehlt.

c)
~~Behauptung:~~

Ermittlung einer Einbettung $\mathcal{S}$ von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$!

Sei $x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$.

Ich Berechne nun $P^{-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} =: \mathcal{S}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$

Dieser Stil ist zwar verständlich, es ist aber die Sprache einer Aufgabenstellung und nicht einer Bearbeitung.

Damit ist $\mathcal{S}$ wie folgt:

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\mathcal{S}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Nun soll mit $\mathcal{S}$ folgendes gelten:

$\mathcal{S}(G_{f'}) = M \cap H'$ mit $H' = \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Dabei ist

$$G_{f'} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2 \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 x_2 = x_3^2 \right\}$$ und

$$H' = S(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1 \right\}.$$

<u>Behauptung</u>: $S(G_{f'}) = M \cap H'$

$$S(G_{f'}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cancel{x_1} \\ \cancel{x_2} \\ \cancel{x_3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_2, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 1, v_2 = (-v_3)^2 = v_3^2 \right\}$$

$$M \cap H' = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = x_3^2 \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = x_3^2, x_1 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3^2, x_1 = 1 \right\} = S(G_{f'})$$ ✓

kleine Lücke bei (b)

sehr klare Bearbeitung

4,5/5

kleinere stilistische Verbesserungen sind möglich.