Geometrie

Ausführliche Abgabe

Aufgabe 3

Svenja Heller

gegeben: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

a) zz: f ist bijektiv (d.h. injektiv und surjektiv).

Beweis:

i) Injektivität: Für alle $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

zz: $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Beweis:

Sei $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

also $\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix}$.

Da die ~~reelle~~ dritte Wurzel einer reellen Zahl eindeutig ist, gilt dann hier:

$x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$,

also $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

schöner: Somit

Also ist f injektiv. //

ii) Surjektivität:

zz: $\forall y \in \mathbb{R}^2 \; \exists x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y$.

Beweis:

Sei $y \in \mathbb{R}^2$ mit $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Wegen der Eindeutigkeit der ~~reellen~~ dritten Wurzel einer reellen Zahl gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, so dass $\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, d.h. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{y_1} \\ \sqrt[3]{y_2} \end{bmatrix}$.

Du redest über die Eindeutigkeit der dritten Wurzel, die hier aber gar nicht explizit zu tragen kommt. Würde mit aufzeigen!

Also ist f surjektiv. //

Aus i) und ii) folgt, dass f bijektiv ist. //

✓

Also:

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \sqrt[3]{y_1} \\ \sqrt[3]{y_2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{y_1}^3 \\ \sqrt[3]{y_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y$$

b) Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ nennen wir Punkte und für $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$ nennen wir die Teilmenge

$$g^*_{a,b,c} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : a\sqrt[3]{y_1} + b\sqrt[3]{y_2} = c \right\}$$

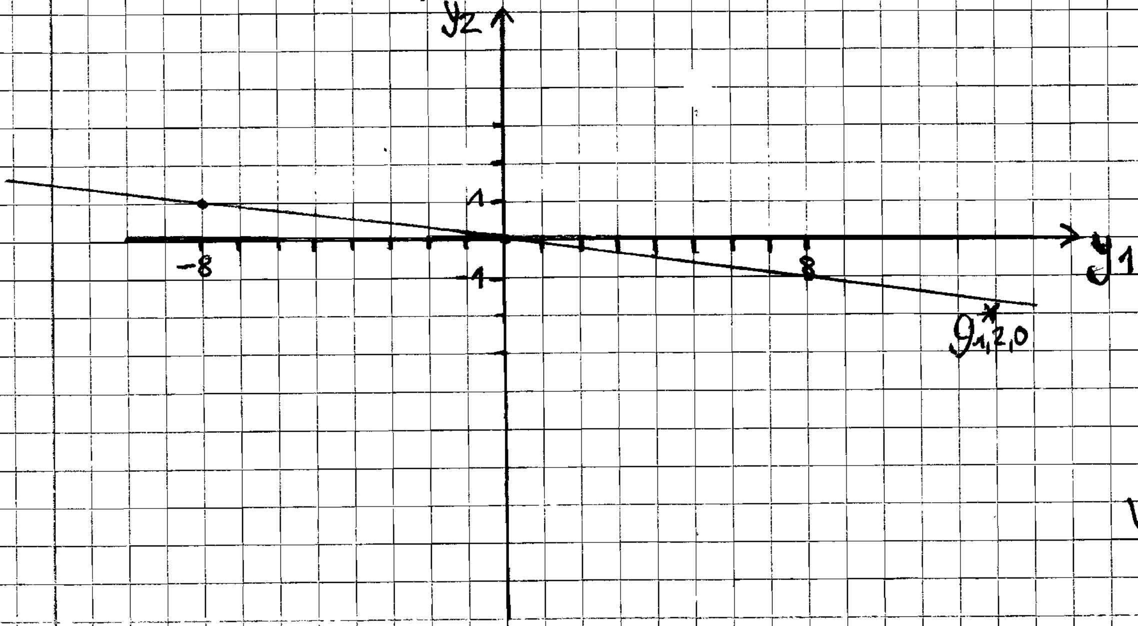
eine $*$-Gerade.

i) <u>Skizzieren der wesentlichen Verläufe von</u>

<u>1) $g^*_{1,2,0}$, 2) $g^*_{1,1,1}$, 3) $g^*_{1,2,8}$.</u>

1) $$g^*_{1,2,0} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \sqrt[3]{y_1} + 2\sqrt[3]{y_2} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : y_2 = -\frac{1}{8} y_1 \right\}.$$

<u>Skizze von $g^*_{1,2,0}$:</u>



✓

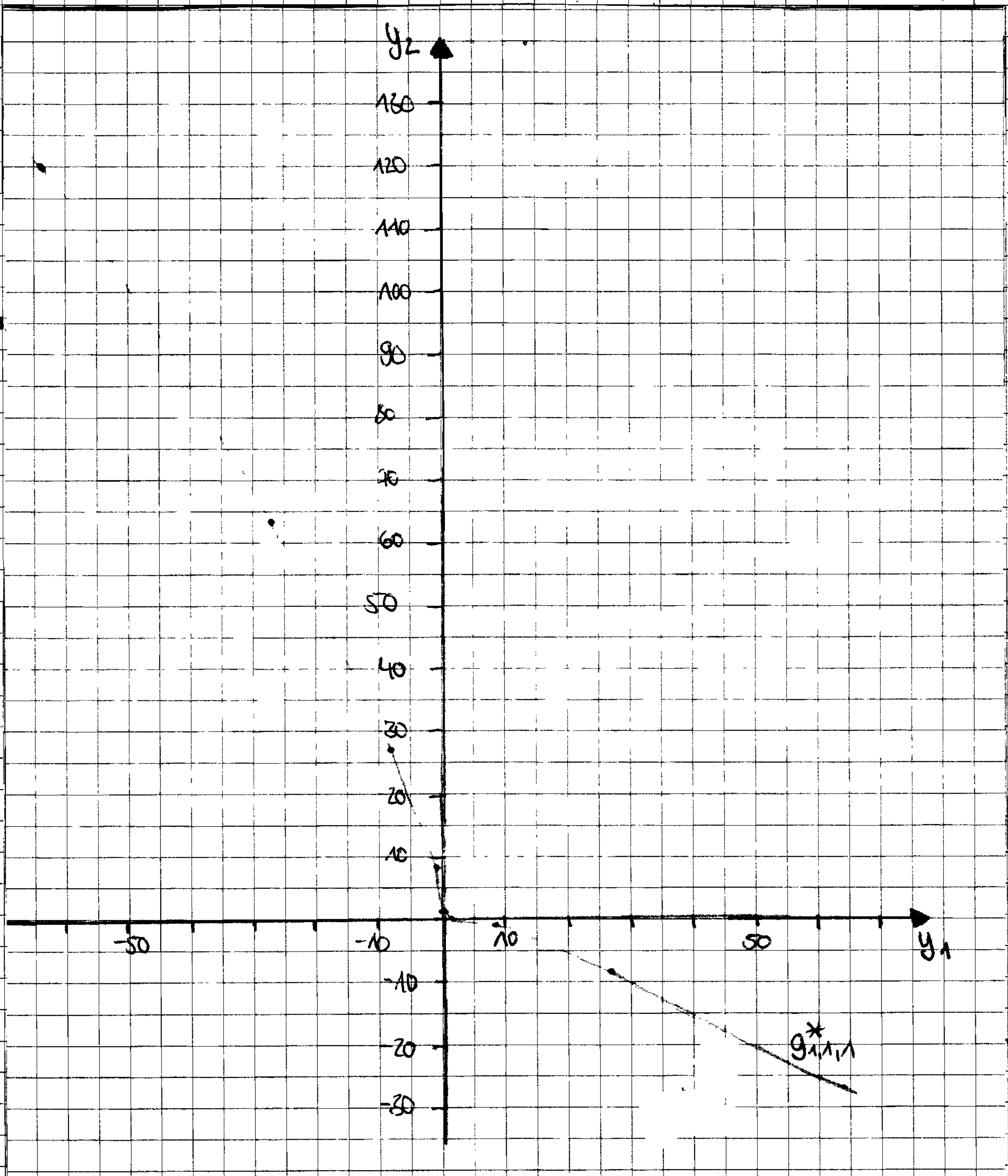
2) $g^*_{1,1,1} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} = 1 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : y_2 = \left(1 - \sqrt[3]{y_1}\right)^3 \right\}.$

Wertetabelle für $g^*_{1,1,1}$:

y_1	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
y_2	125	64	27	8	1	0	-1	-8	-27

Skizze für $g^*_{1,1,1}$:



✓

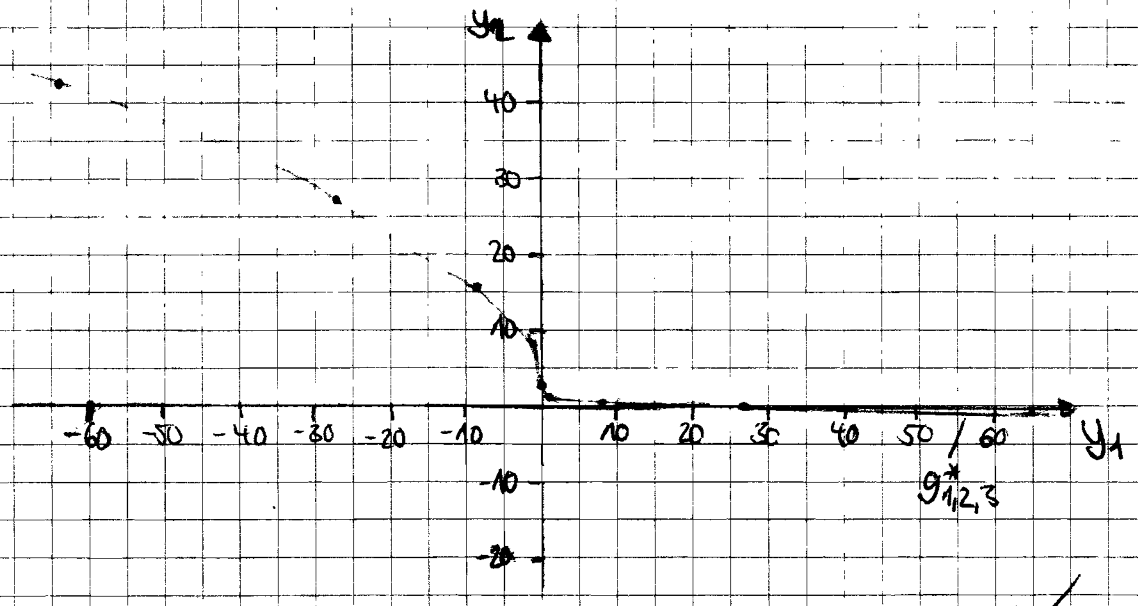
3) $g^*_{1,2,3} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \sqrt[3]{y_1} + 2\sqrt[3]{y_2} = 3 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : y_2 = \left(\frac{3 - \sqrt[3]{y_1}}{2} \right)^3 \right\}.$

<u>Wertetabelle für $g^*_{1,2,3}$:</u>

y_1	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
y_2	$\frac{343}{8}$	27	$\frac{125}{8}$	8	$\frac{27}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$

<u>Skizze für $g^*_{1,2,3}$:</u>



✓

besser: spitzer Bleistift!

ii) ZZ: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$ gilt:

$$f(g_{a,b,c}) = g^*_{a,b,c}.$$

Dabei gilt:

$$g^*_{a,b,c} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : a\sqrt[3]{y_1} + b\sqrt[3]{y_2} = c \right\}$$

$$g_{a,b,c} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : ay_1 + by_2 = c \right\}$$

$$f(g_{a,b,c}) = \left\{ f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) : ay_1 + by_2 = c \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} : ay_1 + by_2 = c \right\}$$

Beweis durch Mengeninklusion:

„$\subseteq$": Sei $\begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} \in f(g_{a,b,c})$, also gilt:

$$ay_1 + by_2 = c.$$

ZZ: $\begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} \in g^*_{a,b,c}$.

Beweis: Da $\begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} \in f(g_{a,b,c})$, gilt:

$$ay_1 + by_2 = c.$$

Da die reelle dritte Wurzel reeller Zahlen eindeutig bestimmt ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt[3]{x^3} = x$, gilt auch:

$$a\sqrt[3]{y_1^3} + b\sqrt[3]{y_2^3} = c.$$

Demnach gilt:

$$\begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} \in g^*_{a,b,c}. \quad //$$

„$\supseteq$": Sei $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in g^*_{a,b,c}$, also gilt:

$$a\sqrt[3]{y_1} + b\sqrt[3]{y_2} = c.$$

zz: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in f(g_{a,b,c})$.

Beweis:

Wegen der Eindeutigkeit der ~~reellen~~ dritten Wurzel reeller Zahlen gibt es eindeutig bestimmte $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, sodass:

$$\begin{bmatrix} z_1^3 \\ z_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$ s.o.! Würde mit anfangen!

Also:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{y_1} \\ \sqrt[3]{y_2} \end{bmatrix}.$$

Da $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in g^*_{a,b,c}$ gilt:

$$a\sqrt[3]{y_1} + b\sqrt[3]{y_2} = c.$$

Da $y_1 = z_1^3$ und $y_2 = z_2^3$ gilt: ← Mit dieser Voraussetzung würde dieser Schritt auch kürzer ausfallen!

$$a\sqrt[3]{z_1^3} + b\sqrt[3]{z_2^3} = c.$$

Nun gilt:

$$az_1 + bz_2 = c.$$

Also: ← hier wieder kurze Bem: $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sqrt[3]{x^3} = x$.

$$\begin{bmatrix} z_1^3 \\ z_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in f(g_{a,b,c}). \quad //$$

✓

Insgesamt gilt also:

$$f(g_{a,b,c}) = g^*_{a,b,c}. \quad //$$

✓

iii) <u>Nachweis von (E1), (E2) und (E3) für $*$-Geraden und mit $\mathbb{R}^2$ als Punktmenge</u>

Wir wissen aus a), dass f bijektiv ist. Darüberhinaus wissen wir aus b) ii), dass $f(g_{a,b,c}) = g^*_{a,b,c}$.
Demnach gilt:

$$g_{a,b,c} \cong g^*_{a,b,c},$$

d.h. die beiden Mengen weisen die gleichen Eigenschaften auf.
Demnach genügt es, (E1), (E2) und (E3) für $g_{a,b,c}$ in $\mathbb{R}^2$ nachzuweisen.
Nun gilt:

$$\begin{aligned} g_{a,b,c} &= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : a y_1 + b y_2 = c \right\} \\ &= \text{Lös}(A, c) \qquad \text{mit } A = [a\, b] \\ &= a + \mathbb{R}v \qquad \text{mit } a, v \in \mathbb{R}^2, \ v \neq 0. \end{aligned}$$

a doppelt!?!

Also handelt es sich bei $g_{a,b,c}$ per Definition um eine Gerade.
In der Vorlesung vom 27.10.2010 wurde bewiesen, dass (E1), (E2) und (E3) in einem zweidimensionalen K-Vektorraum gelten, somit gelten sie insbesondere in $\mathbb{R}^2$ für $g_{a,b,c}$.
geht in die richtige Richtung, ist hier aber nicht ganz richtig!
Da nun $g_{a,b,c} (\cong) g^*_{a,b,c}$, gelten (E1), (E2) und (E3) auch für $*$-Geraden mit $\mathbb{R}^2$ als Punktmenge. ✓

iv) Wann ist $g^*_{a,b,c} = g^*_{a',b',c'}$ für zwei *-Geraden?

Wieder nutzen wir, dass $g^*_{a,b,c} \overset{\text{s.o.}}{\cong} g_{a,b,c}$.
Also untersuchen wir, unter welchen Bedingungen $g_{a,b,c} = g_{a',b',c'}$ und transformieren diese Bedingungen auf *-Geraden.

Seien also $g_{a,b,c}$ und $g_{a',b',c'}$ zwei Geraden mit

$$g_{a,b,c} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : a y_1 + b y_2 = c \right\} = \text{Lös}([a\ b], c),$$

$$g_{a',b',c'} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : a' y_1 + b' y_2 = c' \right\} = \text{Lös}([a'\ b'], c').$$

Nun gilt:

$$g_{a,b,c} \cap g_{a',b',c'} = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \right).$$

Weiter gilt:

$$g_{a,b,c} = g_{a',b',c'} \Leftrightarrow \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \right) = \text{Lös}([a\,b], c) = \text{Lös}([a'\,b'], c').$$

*

Also:

Die Geraden $g_{a,b,c}$ und $g_{a',b',c'}$ sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sind $\mathbb{R}$-linear abhängig.

Da nun $g_{a,b,c} = g_{a',b',c'} \Leftrightarrow g^*_{a,b,c} = g^*_{a',b',c'}$, gilt:

$$g^*_{a,b,c} = g^*_{a',b',c'}, \text{ wenn } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

✓