Einzelabgabe Geometrie
Matthias Heinrich
Tutor: Christian Klostermann
Postfach: #69

Aufgabe 4

(a)

Gegeben sind die zwei folgenden Gerade Γ_1, Γ_2 in $\mathbb{Q}^3$:

$$\Gamma_1 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right), \Gamma_2 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Wir überprüfen nun, ob es eine Gerade durch den Punkt $p = \begin{bmatrix}3\\4\\-10\end{bmatrix}$ gibt, die gleichzeitig die beiden Geraden Γ_1, Γ_2 trifft.

Zunächst suchen wir jeweils eine Parameterdarstellung für Γ_1 sowie Γ_2.

zu Γ_1:
Um die Parameterdarstellung zu finden, wird der oben beschrieben Lösungsraum untersucht. Dazu wird die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die reduzierte Zeilenstufenform gebracht.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 1\end{array}\right) \overset{EZU}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

Jetzt kann die Paramterdarstellung für Γ_1 abgelesen werden. Somit ist

$$\Gamma_1 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{Q}\right\}.$$

zu Γ_2:
Um eine Parameterdarstellung für Γ_2 zu finden, muss wieder die entsprechende erweiterte Koeffizientenmatrix umgeformt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\1 & -2 & 3 & 1\end{array}\right) \overset{EZU}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

So kommt man auf die folgende Parameterdarstellung für Γ_2:

$$\Gamma_2 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}-5\\2\\3\end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{Q}\right\}$$

Als nächstes wird die Lage von Γ_1 und Γ_2 zueinander untersucht. Dazu wird zunächst überprüft, ob Γ_1 und Γ_2 gemeinsame Punkte haben. Deshalb wird das folgende Gleichungssystem aufgestellt:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}-5\\2\\3\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix}-5\mu - \lambda = \frac{4}{3}\\ 2\mu + 2\lambda = \frac{2}{3}\\ 3\mu - \lambda = 0\end{vmatrix}$$

Auch dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe einer erweiterten Koeffizientenmatrix und elementarer Zeilenumformungen lösen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & \frac{4}{3} \\ 2 & 2 & \frac{2}{3} \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{EZU}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

Nun ist zu erkennen, dass $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, da in der letzten Zeile der Matrix ein Widerspruch auftritt, also haben Γ_1 und Γ_2 keinen gemeinsamen Punkt.

Im nächsten Schritt werden die Richtungsvektoren von Γ_1 und Γ_2 auf lineare Abhängigkeit überprüft. Dazu werden diese als Zeilenvektoren in eine Matrix geschrieben und ebenfalls mit elementaren Zeilenumformungen in eine reduzierte Zeilenstufenform überführt.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{EZU}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Man sieht nun, dass Γ_1 und Γ_2 unterschiedliche Richtungen haben, da keiner der beiden Richtungsvektoren ein Vielfaches des anderen ist.
Da die beiden Geraden Γ_1 und Γ_2 keine gemeinsamen Punkte haben und in unterschiedliche Richtungen zeigen, sind sie windschief.

Im nächsten Schritt wird eine Ebene E so konstruiert, dass der Punkt p und die Gerade Γ_1 in E_2 liegen. Dazu nehme man den Punkt $p = \begin{bmatrix}3\\4\\-10\end{bmatrix}$ sowie die Punkte $\gamma_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \in \Gamma_1$ und $\gamma_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} \in \Gamma_1$ und bilde die beiden Vektoren die von p nach γ_1 und von p nach γ_2 zeigen.

Dann ist

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + k \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + l \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), k, l \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix}, k, l \in \mathbb{Q} \right\}$$

die Ebene mit $p \in E$ und $\Gamma_1 \subset E$.

Als nächstes wird der Durchstoßpunkt d von Γ_2 durch E gesucht. Dazu stellt man das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2k + l + 5\mu = -\frac{10}{3} \\ 4k + 6l - 2\mu = -\frac{14}{3} \\ -10k - 11l - 3\mu = 10 \end{vmatrix}$$

Auch diese Gleichungssystem lässt sich wieder mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & -\frac{10}{3} \\ 4 & 6 & -2 & -\frac{14}{3} \\ -10 & -11 & -3 & 10 \end{array} \right) \overset{EZU}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{12} \end{array} \right)$$

So erhält man durch Einsetzen der Lösungen für k, l und μ den Durchstoßpunkt d:

$$d = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + \frac{7}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \frac{9}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{11}{12} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

Behauptung: Nun ist

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + \mu \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{17}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{bmatrix} \right), \mu \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{13}{2} \\ -\frac{29}{4} \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{Q} \right\}$$

eine Gerade durch den Punkt p, die Γ_1 und Γ_2 trifft.

Beweis.

$\underline{p \in \Gamma_3}$ ist mit $\mu = 0$ klar.

$\underline{\Gamma_2 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset}$ ist mit $\mu = -1$ ebenfalls klar.

Nun ist noch $\underline{\Gamma_1 \cap \Gamma_3}$ zu überprüfen. Deshalb wird erneut ein Gleichungssystem aufgestellt:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\-10\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}-\frac{5}{4}\\\frac{13}{2}\\-\frac{29}{4}\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix}\lambda + \frac{5}{4}\mu = 2\\2\lambda + \frac{13}{2}\mu = -4\\\lambda + \frac{29}{4}\mu = -10\end{vmatrix}$$

Auch dieses Gleichungssystem wird mit elementaren Zeilenumformungen gelöst:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{5}{4} & 2\\2 & \frac{13}{2} & -4\\1 & \frac{29}{4} & -10\end{array}\right) \overset{EZU}{\to} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{9}{2}\\0 & 1 & -22\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Nachdem das Gleichungssystem gelöst wurde, erkennt man, dass die Geraden Γ_1 und Γ_3 einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{9}{2}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\4\\-10\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-\frac{5}{4}\\\frac{13}{2}\\-\frac{29}{4}\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\-9\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}\right\}$$

Nun ist klar, Γ_3 ist tatsächlich eine Gerade durch den Punkt p, die Γ_1 und Γ_2 trifft.

$\square$

(b)

In diesem Aufgabenteil ist nach einer Ebene E_2 gesucht, die keine der beiden Geraden Γ_1, Γ_2 trifft.

Behauptung: $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \right\}$ ist die gesuchte Ebene.

Beweis. Nun ist folgendes zu untersuchen:

1. Ist E_2 wirklich eine Ebene und nicht etwa eine Gerade?

2. Trifft E_2 tatsächlich nicht die anderen beiden Geraden?
   Gilt also: $E_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset = E_2 \cap \Gamma_2$?

zu 1.:
E_2 ist eine Ebene, wenn die beiden Richtungsvektoren von E_2 linear unabhängig sind. Bereits in Aufgabenteil (a) wurde, als die Lage der Geraden Γ_1 und Γ_2 überprüft wurde, gezeigt, dass dies der Fall ist. Nun ist klar, dass E_2 tatsächlich eine Ebene ist.
zu 2.:
Da die Richtungsvektoren von E_2 die Richtungsvektoren der beiden Geraden Γ_1 und Γ_2 sind, gilt entweder $\Gamma_1 \subset E_2$ (bzw. $\Gamma_2 \subset E_2$) oder aber $E_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ (bzw. $E_2 \cap \Gamma_2 = \emptyset$).
Aus Aufgabenteil (a) ist allerdings bekannt, dass $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} \notin \Gamma_1, \Gamma_2$.
Nun ist gezeigt, dass $E_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset = E_2 \cap \Gamma_2$ gilt. E_2 erfüllt also die geforderten Bedingungen.

$\square$