Einzelabgabe Geometrie

Nils Schulze

Tutor: Christian Klostermann

Postfach: #69

Aufgabe Nr. 8:

~~(a)~~

Voraussetzung: Folgende Vektoren sind gegeben:

$$p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad p^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad p^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a)

Gesucht: Ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau den affinen Unterraum $p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)}$ ergibt.

Idee: Berechne zunächst die Parameterdarstellung des gegebenen affinen Unterraumes, um anschließend dessen Darstellung als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen:

(i) Nach 5.10(d) erhält man für die Parameterdarstellung:

$$p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)} = p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, p^{(2)} - p^{(0)}, p^{(3)} - p^{(0)}, p^{(4)} - p^{(0)} \rangle_K$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle_K$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle_K \checkmark$$

(ii) Ausgehend von der Parameterdarstellung muss im nächsten Schritt nach 4.8. der Orthogonalraum folgender Matrix bestimmt werden:

$$M_u := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in K^{4\times 4}$$

Die Spaltenvektoren entsprechen dabei den Richtungsvektoren der Parameterdarstellung.
Für die Ermittlung des Orthogonalraumes von M_u betrachte $Lös({}^tM_u, 0)$.
Dies liefert nun:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{III}-3\overline{I}]{\overline{II}-2\overline{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{II} \leftrightarrow \overline{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-\frac{1}{4})\overline{IV}]{\overline{III}+2\overline{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\overline{III}+2\overline{IV}]{\overline{I}-\overline{IV},\ \overline{II}-\overline{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{III} \leftrightarrow \overline{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\overline{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{I}-\overline{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit gilt: $Lös({}^tM_u, 0) = \langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:w} \rangle_K$ ✓

Setze weiter: $A := {}^tw$. Daraus folgt: $A = [1\ 1\ 1\ 1] \in K^{1\times 4}$. Ferner gilt:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle_K = Lös([1\ 1\ 1\ 1], 0).$$

Im letzten Schritt wird nun $b := A \cdot p^{(0)}$ berechnet, woraus folgt: $b = [1\ 1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 10$

Nach 4.8 erhalten wir damit insgesamt:
Der durch $p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)}$ gegebene affine Unterraum kann beschrieben werden als: $p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)} = Lös(A, b) = Lös([1\ 1\ 1\ 1], 10)$, so dass das gesuchte lineare Gleichungssystem lautet:

$$(A, b) = ([1\ 1\ 1\ 1], 10)$$ ✓

(b)

Gesucht: Es sind die Parameterdarstellungen für die Schnitte folgender affiner Unterräume gesucht:

(i) $(p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)}) \cap (p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)})$

und (ii) $(p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)}) \cap (p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)})$

Zu (i): Um den Schnitt beider affiner Unterräume zu bestimmen, werden diese zunächst in Parameterform überführt. Nach 5.10(d) folgt:

$$\Gamma' := p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \overset{5.10(d)}{=} p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, p^{(2)} - p^{(0)} \rangle_K \overset{\text{Vor.}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle_K$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=: a'} + \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle_K}_{=: U'}$$

$$\Delta' := p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)} \overset{5.10(d)}{=} p^{(2)} + \langle p^{(3)} - p^{(2)}, p^{(4)} - p^{(2)} \rangle_K \overset{\text{Vor.}}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_K$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=: b'} + \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_K}_{=: W'}$$

Gemäß 5.2 (a)(ii) lässt sich der Schnitt zweier affiner Unterräume $\Gamma = a + U$, $\Delta = b + W$ $(\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset)$ in Parameterdarstellung ermitteln durch (allg.):

$$\Gamma \cap \Delta = \{ a + M_U [E_r \,\vdots\, 0] \cdot \text{Lös}([M_U, -M_W], b - a) \}.$$

Ferner gilt dabei:

$U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$ und $M_U := [u^{(1)}, \dots, u^{(r)}]$ bzw. $W = \langle w^{(1)}, \dots, w^{(s)} \rangle_K$

und $M_W := [w^{(1)}, \dots, w^{(s)}]$.

Angewendet auf diese Aufgabe bedeutet dies:

$$\Gamma' \cap \Delta' = \left\{ a' + M_{U'} \, [E_2 \,\vdots\, 0] \cdot \mathrm{Lös}\left([M_{U'}, -M_{W'}], b' - a' \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \mathrm{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Im nächsten Schritt wird nun $\mathrm{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$ berechnet. Man erhält:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} + 3\overline{I}]{\overline{II} - \overline{I},\ \overline{III} - \overline{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} + \overline{III}]{\overline{IV} + \overline{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\left(-\frac{1}{4}\right)\overline{III}]{\frac{1}{4}\overline{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{II} \leftrightarrow \overline{III}]{\overline{I} - 2\overline{III}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{I} + \overline{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit folgt: $\mathrm{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\}$ und schließlich

$$\Gamma' \cap \Delta' \overset{\text{s.o.}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 - \frac{5}{4}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda + 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ \lambda + 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ \lambda - 2 + \frac{5}{2}\lambda \\ -3\lambda - 2 + \frac{5}{2}\lambda \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 - \frac{3}{2}\lambda \\ 2 - \frac{3}{2}\lambda \\ -2 + \frac{7}{2}\lambda \\ -2 - \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\}$$

Die Parameterdarstellung für $\Gamma' \cap \Delta'$ lautet damit:

$$\Gamma' \cap \Delta' = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \lambda \in K \right\}$$

zu (ii): Ähnlich wie in (i) werden beide affine Unterräume zunächst in Parameterform gebracht. Nach 5.10(d) folgt:

$$\Gamma'' := \rho^{(0)} \vee \rho^{(1)} \vee \rho^{(2)} \vee \rho^{(3)} \overset{5.10(d)}{=} \rho^{(0)} + \langle \rho^{(1)} - \rho^{(0)}, \rho^{(2)} - \rho^{(0)}, \rho^{(3)} - \rho^{(0)} \rangle_K$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle_K = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=: a''} + \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_K}_{=: 4''}$$

$$\Delta'' := \rho^{(1)} \vee \rho^{(2)} \vee \rho^{(3)} \vee \rho^{(4)} \overset{5.10(d)}{=} \rho^{(1)} + \langle \rho^{(2)} - \rho^{(1)}, \rho^{(3)} - \rho^{(1)}, \rho^{(4)} - \rho^{(1)} \rangle_K$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_K = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: b''} + \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_K}_{=: w''}$$

Wendet man wie unter (i) dargestellt 5.2(a)(ii) an, so liefert dies:

$$\Gamma'' \cap \Delta'' = \left\{ a'' + M_{u''} [E_3 \,\vdots\, 0] \cdot \text{Lös}\left([M_{u''}, -M_{w''}], b'' - a'' \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Im nächsten Schritt wird nun $\text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$ berechnet. Man erhält

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} + 3\overline{I}]{\overline{II} - \overline{I},\ \overline{III} - \overline{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & -8 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(\frac{1}{4})\overline{II}]{\overline{III} - \overline{II},\ \overline{IV} + \overline{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\overline{IV} - 4\overline{II}]{(-\frac{1}{4})\overline{III}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{II} \leftrightarrow \overline{III},\ \overline{I} - 2\overline{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\overline{I} - 3\overline{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für die gesuchte Lösungsmenge gilt also:

$$\text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\}$$

und damit

$$\Gamma'' \cap \Delta'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \lambda - \mu \\ \lambda + \frac{1}{4}\nu \\ \mu - \frac{1}{2}\nu \\ \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \lambda - \mu + 2\lambda + \frac{1}{2}\nu + 3\mu - \frac{3}{2}\nu \\ 1 - \lambda - \mu + 2\lambda + \frac{1}{2}\nu - \mu + \frac{1}{2}\nu \\ 1 - \lambda - \mu - 2\lambda - \frac{1}{2}\nu - \mu + \frac{1}{2}\nu \\ -3 + 3\lambda + 3\mu - 2\lambda - \frac{1}{2}\nu - \mu + \frac{1}{2}\nu \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \lambda + 2\mu - \nu \\ 1 + \lambda - 2\mu + \nu \\ 1 - 3\lambda - 2\mu \\ -3 + \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\}$$

Die Parameterdarstellung für $\Gamma'' \cap \Delta''$ lautet somit:

$$\Gamma'' \cap \Delta'' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in K \right\} = \Delta'' = \Gamma'' \; !$$

(v)

inhaltlich und fachsprachlich einwandfrei

8 b) ii) hätte lediglich über Dimensionsbetrachtungen schneller erschlagen werden können!

jetzt: 5/5