Modul Geometrie 25. Oktober 2010

Wintersemester 2010/11

Schmale

Aufgaben

(1) **(a)** Beweisen Sie Beobachtung 9 in §1.(1)

(b) Mit $(r, s), (r', s') \in K^2 \setminus \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ und $c, c' \in K$ seien

$$g = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K^2 : \ rx + sy = c \}, \ g' = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K^2 : \ r'x + s'y = c' \} \ .$$

Zeigen Sie: (2)

$$g \cap g' = \varnothing \ \Leftrightarrow \ \big[(r, s), (r', s') \ \text{ l. a. über } K \ \ \underline{\text{und}} \ \ (r, s, c), (r', s', c') \ \text{ l. u. über } K \ \big]$$

(2) Wie groß muss die Anzahl der Elemente des Körpers K mindestens sein, damit es in K^2 vier verschiedene paarweise nicht parallele Geraden gibt? (3)

....

(1) Anleitung zu (a): Wenn etwa $g = a + Kv$ mit $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, betrachte den eindimensionalen (!) Lösungsraum $\text{Lös}\,(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}, 0) = \langle \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \rangle_K$.

(2) Anleitung zu (b): Betrachte (warum ?) $\text{Lös}\,(\begin{bmatrix} r & s \\ r' & s' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix})$.

(3) Zeige, dass es mit $\mathbb{Z}_2$ nicht geht und betrachte bei einem Körper mit mindestens 3 Elementen Geraden durch 0.