Modul Geometrie 10. Januar 2011
Wintersemester 2010/11
Schmale

Aufgabenblatt 10

(25) Dreiecksflächen und Flächentreue in $\mathbb{R}^3$.
Seien a, b, c affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^3$ und gelte $\big(\mathbb{R}(b-a)+\mathbb{R}(c-a)\big)^{\perp} = \mathbb{R}w$. Die (absolute) Fläche $F_{a,b,c}$ des durch a, b, c gegebenen Dreiecks kann man wie folgt angeben:

$$F_{a,b,c} = \frac{1}{2\| w \|}\left|\mathsf{det}\left[b-a, c-a, w\right]\right| .$$

(a) Begründen Sie, warum diese Festsetzung vernünftig ist und berechnen Sie $F_{a,b,c}$ wenn $a = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$.

(b) Zeigen Sie: Schrägspiegelungen in der Ebene $a + \langle b-a, c-a\rangle_{\mathbb{R}}$ an einer Geraden erhalten die Dreiecksfläche.(15)

(26) Drehungen, elementare Drehungen und Spiegelungen.

(a) Zeigen Sie indem Sie die Drehachse und den Drehwinkel bestimmen:

Die lineare Abbildung ℓ_A mit $A = \begin{bmatrix} 9/25 & 12/125 & 116/125 \\ -12/25 & 109/125 & 12/125 \\ -4/5 & -12/25 & 9/25 \end{bmatrix}$ ist eine Drehung.

(b) Stellen Sie die Drehung ℓ_A durch elementare Drehungen dar.

(c) Stellen Sie die Drehung ℓ_A dar als Hintereinanderausführung von 2 orthogonalen Spiegelungen an Ebenen.

(27) Beweisen Sie **Satz 7.15 (c).**

(15) Anleitung: Wenn $a + \langle b-a, c-a\rangle_{\mathbb{R}} = d + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ und f die Schrägspiegelung an $d + \mathbb{R}u$ in Richtung $\mathbb{R}v$ ist, dann lassen sich die Bilder von a, b, c direkt angeben und die Determinanten vergleichen.