Modul Geometrie 17. Januar 2011

Wintersemester 2010/11

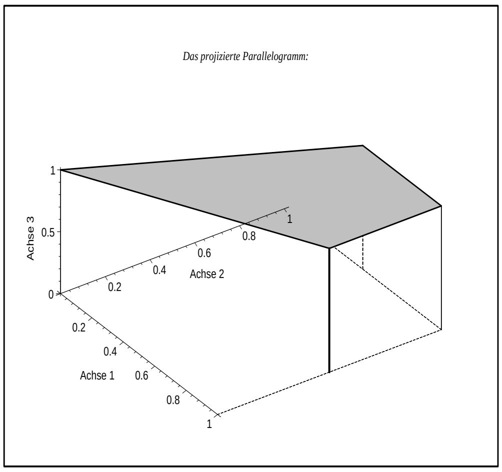
Schmale

Aufgabenblatt 11

(28) (5 Punkte) Ein gleichseitiges Parallelogramm (a, b, c, d) in einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ erscheine einer Betrachterin als Viereck (a', b', c', d') in der Ebene $\Gamma = e^{(3)} + \langle e^{(1)}, e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$, und zwar seien $a' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d' = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Über den Innenwinkel des Parallelogramms bei der Ecke a sei vorausgesetzt:

$$\cos \measuredangle(b' - a', d' - a') = \cos \measuredangle(b - a, d - a) \ .$$

Kann die Betrachterin sich im Punkt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ befunden haben und wo könnte das Parallelogramm im Raum liegen? Machen Sie eine Skizze.



(29) In $\mathbb{R}^3$ seien $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\Gamma' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 2-t \\ t \\ t+2 \end{bmatrix}$ für ein t aus $\mathbb{R}$. Sei ε die folgende „Einbettung“:

$$\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \ x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \ .$$

Bestimmen Sie $\varepsilon(\Gamma) \cap \varepsilon(\Gamma')$ und $\langle \varepsilon(\Gamma) \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle \varepsilon(\Gamma') \rangle_{\mathbb{R}}$ in Abhängigkeit von t.

(30) Sei K ein Körper, Γ eine Hyperebene in K^{n+1}, die nicht durch 0 geht, und $f : \Gamma \to \Gamma$ eine affine Abbildung. [16]

(a) Zeigen Sie:

Es gibt genau eine lineare Abbildung ℓ in K^{n+1} derart, dass $\ell_{|\Gamma} = f$.

(b) Sei nun $\Gamma = e^{(n+1)} + \langle e^{(1)}, \ldots, e^{(n)} \rangle_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass dann die Matrix A der linearen Abbildung ℓ aus (a) die folgende Form hat: $A = \begin{bmatrix} A' & | & a' \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ mit einer geeigneten Matrix A' aus $K^{n \times n}$ und einem Vektor a' aus K^n.

....

[16] Wenn Sie es vorziehen, dann können Sie die Aufgabe für den Spezialfall $n = 3$ und $K = \mathbb{R}$ bearbeiten. Stichpunkte als Anleitung zu (a): $\Gamma = a + U, f(a + u) = f(a) + \ell_f(u), f(a) \notin U, \langle f(a) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus U = K^{n+1}$, ℓ kann durch seine Wirkung auf $f(a)$ und U vorgegeben werden und ist dadurch vollständig festgelegt, $\ell_{|U} = \ell_f$.