Modul Geometrie 31. Januar 2011

Wintersemester 2010/11

Schmale

Aufgabenblatt 13

(34) [17] Zwei reelle Funktionen in zwei Variablen $f, f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien wie folgt erklärt:

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1x_2 - 1,\ \ f'(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_2 - x_1^2 \ \text{ mit reellen } \ x_1, x_2 \ .$$

Die Nullstellenmengen dieser Funktionen seien mit G_f und $G_{f'}$ bezeichnet. G_f und $G_{f'}$ sind zugleich die Graphen der reellen Funktionen $t \mapsto 1/t$ für $t \neq 0$ und $t \mapsto t^2$. In $\mathbb{R}^3$ seien nun noch

$$M = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \ x_1x_2 = x_3^2 \ \}, M' = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \ x_2x_3 = x_1^2 \ \} \ .$$

$G_f, G_{f'}, M, M'$ sind unten abgebildet. Prüfen Sie für sich zur Veranschaulichung, ob es wirklich die richtigen Abbildungen sind!

(a) Bestätigen Sie zunächst, dass mit der Standardeinbettung ε von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ und mit $H = \varepsilon(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\varepsilon(G_f) = M \cap H,\ \ \varepsilon(G_{f'}) = M' \cap H \ .$$

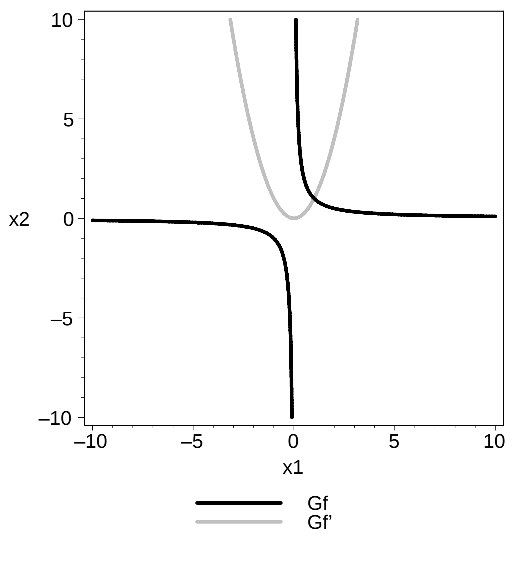
(b) Sei $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. P ist eine elementare Drehmatrix.

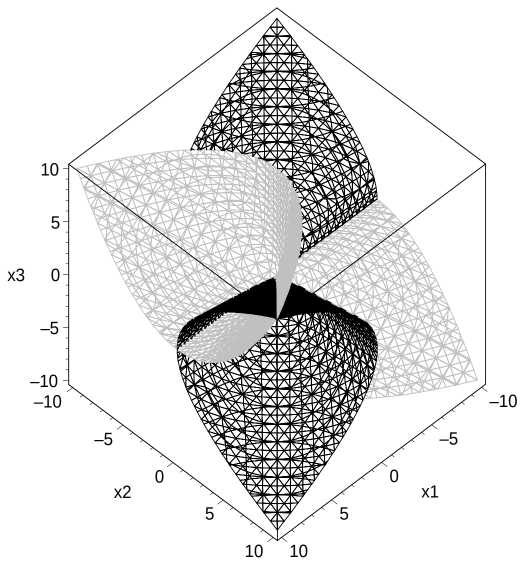
Bestätigen Sie, dass $PM = M'$.

(c) Ermitteln Sie eine Einbettung δ von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, mit der gilt

$$\delta(G_{f'}) = M \cap H' \ .$$

Dabei ist $H' = \delta(\mathbb{R}^2)$.





[17] Die Nummern vom letzten Aufgabenblatt sind um 1 zu erhöhen.

(35) Sei A eine reelle invertierbare 3×3-Matrix. Mit ihr sei folgende Abbildung erklärt:

$$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2,\ p \mapsto Ap\ .$$

Dabei ist $Ap = \{Av :\ v \in p\}$. Begründen Sie, warum $f(p)$ stets wieder ein Punkt in $\mathbb{P}^2$ ist und zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt hat.

(36) **(a)** Seien G und G' zwei verschiedenen (projektive) Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$ und z ein Punkt in $\mathbb{P}(V)$, der weder auf G noch auf G' liegt.
Zeigen Sie:
Durch die Vorschrift

$$\pi(p) := \big(p \vee z\big) \cap G'$$

ist eine bijektive Abbildung von G auf G' gegeben. π ist eine so genannte Perspektivität mit Zentrum z.

(b) Seien jetzt $G = \mathbb{P}(\langle e^{(1)}, e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}), G' = \mathbb{P}(\langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}})$ und $z = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{P}^2$.

Berechnen Sie $\pi\big(\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \big)$.