Modul Geometrie — 1. November 2010

Wintersemester 2010/11

Schmale

Aufgaben

(3) Wir untersuchen die geometrische Auswirkung der Abbildung

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2:\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \quad .$$

Dabei frischen wir unsere Fertigkeiten im Umgang mit bijektiven Abbildungen bei Mengen auf und stellen fest, dass zumindest in der ebenen Inzidenzgeometrie „Geraden“ „krumm“ sein können.

(a) Verifizieren Sie: f ist bijektiv.

(b) Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ nennen wir Punkte und für $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, nennen wir die Teilmenge

$$g^*_{a,b,c} = \{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} :\ a\sqrt[3]{y_1} + b\sqrt[3]{y_2} = c \}$$

eine *-Gerade. Sei G^* die Menge der *-Geraden. Dabei wird die stets eindeutig bestimmte *reelle* dritte Wurzel einer reellen Zahl benutzt.

(i) Skizzieren Sie den wesentlichen Verlauf von von

$$g^*_{1,2,0},\ g^*_{1,1,1} \text{ und } g^*_{1,2,3}\ .$$

(ii) Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$:

$$f(g_{a,b,c}) = g^*_{a,b,c}\ .$$

Dabei ist $g_{a,b,c} = \{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} :\ ay_1 + by_2 = c\}$ und $f(M) = \{f(m) :\ m \in M\}$ für eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$.

(iii) Weisen Sie (E1),(E2) und (E3) aus §1 nach mit $\mathbb{R}^2$ als Punktmenge und für *-Geraden.

(iv) Wann ist $g^*_{a,b,c} = g^*_{a'b'c'}$ für zwei *-Geraden?

(4) **(a)** Gegeben seien die zwei folgenden Geraden Γ_1, Γ_2 in $\mathbb{Q}^3$:

$$\Gamma_1 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right),\ \Gamma_2 = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)\ .$$

Gibt es eine Gerade durch den Punkt $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$, die Γ_1 und Γ_2 trifft?

(b) Geben Sie eine Ebene an, die keine der beiden Geraden Γ_1, Γ_2 trifft.