Aufgabenblatt 4

(7) Sei t eine von 0 verschiedene reelle Zahl, seien $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$ und sei

$$\Gamma_t(a^{(0)}, \dots, a^{(r)}) := \Big\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)} : \ \lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = t \Big\} .$$

Zeigen Sie:

(a) Γ ist ein affiner Unterraum, der $t\,a^{(0)}, \dots, t\,a^{(r)}$ enthält.

(b) Zu jedem affinen Unterraum Δ von $\mathbb{R}^3$ gibt es Punkte $b^{(0)}, \dots, b^{(s)}$ in $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\Delta = \Gamma_t(b^{(0)}, \dots, b^{(s)})$.

(8) **(a)** Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge genau den affinen Unterraum $p^{(0)} \vee \dots \vee p^{(4)}$ ergibt, wenn

$$p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, p^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, p^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, p^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, p^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für

$$\big(p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)}\big) \cap \big(p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)}\big) .$$

und für

$$\big(p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)}\big) \cap \big(p^{(1)} \vee p^{(2)} \vee p^{(3)} \vee p^{(4)}\big) .$$

Zusatzaufgabe zum Aufholen und zur geometrischen Interpretation elementarer linearer Algebra und Matrizenrechnung.

(a) Seien u, v, w, x Vektoren (Punkte) aus K^n, K ein Körper, $M = [u, v, w, x]$ und sei P eine $m \times n$ - Matrix. Zeigen Sie: $PM = [Pu, Pv, Pw, Px]$.

(b) Seien $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ als Punkte in $\mathbb{R}^2$ gegeben (Ecken eines Dreiecks).
Untersuchen Sie selbständig die Auswirkungen elementarer Zeilenumformungen an der Matrix $M = \big[a, b, c\big]$ auf das Dreieck.
Fertigen Sie entsprechende Skizzen an für den Fall, wo die elementaren Umformungen durch die Matrizen $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ repräsentiert sind und dann für P^2, P^{-1}, $Q^2, Q^{(-1)}, PQ, QP$.