Modul Geometrie 22. November 2010
Wintersemester 2010/11
Schmale

Aufgabenblatt 5

(9) Wann schneiden sich Seitenschneidende eines Dreiecks in einem Punkt ? [5]
Seien a, b, c affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^3$ (oder in einem Vektorraum über einem Körper K). Seien weiter

$$a' = b + \mu(c - b),\ b' = c + \mu(a - c),\ c' = a + \mu(b - a)$$

mit einem von 0 und 1 verschiedenen μ aus $\mathbb{R}$ (oder K).
Für welche Werte von μ schneiden sich die drei Geraden

$$a \vee a',\ b \vee b',\ c \vee c'$$

in einem Punkt. [6]

(10) Beweisen Sie im Kontext und mit den Methoden von §5 den folgenden Teil der Behauptung in Beobachtung 5.14. Alle notwendigen Argumente kamen zum Teil mehrfach in der Vorlesung vor.

$a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ *sind genau dann affin abhängig, wenn mit einem* j *aus* $\{0, \ldots, r\}$ *gilt*

$$a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{r} a^{(i)}\ .$$

(11) Seien $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$ und dann $A = \begin{bmatrix} a^{(0)} & a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann invertierbar, wenn $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine affine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Sei ab jetzt $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine affine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) λ aus $\mathbb{R}^4$ ist genau dann der Vektor der baryzentrischen Koordinaten des Vektors x aus $\mathbb{R}^3$ bezüglich $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$, wenn $A\lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Es gibt eine Matrix B in $\mathbb{R}^{4\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass für den Vektor der baryzentrischen Koordinaten λ des Vektors x aus $\mathbb{R}^3$ bezüglich $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ gilt: $\lambda = Bx + b$. [7]

....

[5] In der Vorlesung wurde im Rahmen von Beispiel 5.16 (b) gezeigt, dass der Schwerpunkt von r Punkten $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ für $1 \leq i \leq r$ eine Affinkombination von $a^{(i)}$ und dem Schwerpunkt der übrigen Punkte ist, also ggf. auf deren Verbindungsgeraden liegt. Für r=3 besagt dies, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist. In dieser Aufgabe wird untersucht, wie es sich bei beliebigen Seitenschneidenden verhält.

[6] Anleitung: Z.B. so: Gesucht sind α, β, γ in K derart, dass $a + \alpha(a' - a) = b + \beta(b' - b) = c + \gamma(c' - c)$. Einsetzen von a', b', c' ergibt Affinkombinationen von a, b, c. Benutze Beobachtung 5.15.

[7] Insbesondere ergibt der Übergang zwischen den kartesischen und den baryzentrischen Koordinaten in beiden Richtungen eine affine Abbildung.