Modul Geometrie 29. November 2010
Wintersemester 2010/11
Schmale

Aufgabenblatt 6

(12) Mit $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erklärt durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = b + \ell_B(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Dabei wurde die zur Matrix B bezüglich der kanonischen Basis gehörende lineare Abbildung mit ℓ_B bezeichnet. f ist affin nach Definition 6.1 mit zugehöriger linearer Abbildung ℓ_B.
Es soll jetzt an einem Beispiel untersucht werden, wie sich die Abbildung f auf einem Unterraum auswirkt.

(a) Zeigen Sie: f ist eine Affinität und keine Streckung. [8]

(b) Sei $\Gamma = a + U$ mit $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $U = \langle u^{(1)}, u^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $u^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Zeigen Sie: $f(\Gamma) \subseteq \Gamma$ und $f_{|\Gamma}$ ist eine Streckung.

(c) Geben Sie eine bijektive affine Abbildung g an von Γ nach $\mathbb{R}^2$.

(13) Dynamische 3D-Geometrie analytisch betrachtet an einem sehr einfachen linearen Fall.
Seien $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ die Standard-Basisvektoren in $\mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit der Vorschrift

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + x\right) .$$

(a) Zeigen Sie: f ist eine Affinität und zwar eine Streckung. Bestimmen Sie auch das Zentrum für f.

(b) Wie verläuft nun $f(x)$, wenn x auf einer Geraden verläuft? Bestimmen Sie dazu für zwei verschiedene Punkte p, q die Bildmenge $f(p \vee q)$ der Geraden $p \vee q$ in Parameterdarstellung.

(c) Was ergibt sich, wenn x auf der Einheitskugel[9] um den Nullpunkt läuft?

(14) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei eine echte Streckung im Sinne der Definition in Beispiel 6.8. Zeigen Sie:

(a) Für je zwei verschiedene Punkte x und y aus $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden $f(x) \vee f(y)$ und $x \vee y$ parallel. [10]

(b) Wenn $\alpha \neq 1$, dann hat f genau einen Fixpunkt p^*.

(c) Alle Geraden durch den Fixpunkt p^* werden fest gelassen.

....

[8] Info zur Arbeitsersparnis: B hat zwei verschiedene Eigenwerte.

[9] Eine Kugel K_r um den Nullpunkt mit Radius r ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 : {}^t x \cdot x = r^2\}$.

[10] Im Rahmen der axiomatischen Inzidenzgeometrie (siehe meine Bemerkungen dazu in Kapitel I, §3) wird diese Eigenschaft für die Definition von Dilatationen benutzt. In mehreren Schritten und unter Hinzunahme weiterer Axiome kann dann nachgewiesen werden, dass bis auf einen geometrischen Isomorphismus unsere Dilatationen zusammen mit den Translationen herauskommen. Translationen haben nämlich obige Eigenschaft trivialerweise. Für den ebenen Fall ist dies sehr ausführlich in [KK], Kapitel I, §1 und 2 dargestellt.