Modul Geometrie ★ 6. Dezember 2010 ★
Wintersemester 2010/11
Schmale

Aufgabenblatt 7

(15) Berechnen Sie eine Matrixdarstellung gemäß 6.13 für die Spiegelung

(a) in $\mathbb{R}^2$ in Richtung $\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ an der Geraden Γ, mit $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) in $\mathbb{R}^3$ in Richtung $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ an der Ebene Δ mit $\Delta = \mathsf{L\ddot{o}s}\big(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, 2\big)$.

(16) Sei $\Gamma = \mathsf{L\ddot{o}s}(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 1)$ in $\mathbb{R}^3$. Gegeben seien außerdem a, b, c in $\mathbb{R}^2$ mit

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ .$$

Schließlich sei $h : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung mit der Abbildungsvorschrift

$$h(p) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot p \quad \text{für alle } p \text{ aus } \Gamma.$$

(a) Zeigen Sie: h ist eine Affinität von Γ nach $\mathbb{R}^2$.

(b) Sei f die Spiegelung in Γ an $H \cap \Gamma$ in Richtung $\langle e^{(2)} - e^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$, wobei $H_1 = \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$.

(i) Gegeben sei die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = d + Gx$, wobei

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad G = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\ .$$

Zeigen Sie $g \circ h = h \circ f$.

(ii) Ist g eine Spiegelung ?

(17) Gegeben seien die affinen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = a + Ax,\ g(x) = b + Bx \text{ für } x \text{ aus } \mathbb{R}^2\ ,$$

wobei

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\ .$$

Zu welchem Abbildungstyp gehört jeweils $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$?