Modul Geometrie 20. Dezember 2010

Wintersemester 2010/11

Schmale

Aufgabenblatt 9

(21) Zum Beispiel „Szenengraphen“ (6.27).[12]
Geben Sie zwei Affinitäten f und g in $\mathbb{R}^3$ jeweils als Hintereinanderausführung von Translationen, Spiegelungen, Scherungen, Streckungen und Parallelstreckungen (in geeigneter Abfolge) an derart, dass die Punktmenge

$$\{f(e^{(i)}) : \ 0 \le i \le 3\} \ \bigcup \ \{g(e^{(i)}) : \ 0 \le i \le 3\}$$

genau die Eckpunkte einer Pyramide mit einem regelmäßigen 6-Eck mit Seitenlänge 3 als Grundfläche und mit Höhe 4 enthält. Dabei soll der Schwerpunkt der Pyramide im Punkt $e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}$ liegen.[13]

(22) (a) Abstand zweier Graden.
Seien $v = {}^{\mathsf{t}}[1, 2, 3, 4]$, $u = {}^{\mathsf{t}}[1, -2, 1, -2]$, $v' = {}^{\mathsf{t}}[0, 1, 1, 1]$, $u' = {}^{\mathsf{t}}[1, 0, -1, 0]$ Vektoren aus $\mathbb{R}^{4\times 1}$ und $\Gamma = v + \langle u\rangle_{\mathbb{R}}$, $\Gamma' = v' + \langle u'\rangle_{\mathbb{R}}$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Graden bezüglich des Standardskalarproduktes.

(b) Abstand zweier Ebenen.[14]
Seien $u = {}^{\mathsf{t}}[0, 1, 0, 1, 0]$, $u_1 = {}^{\mathsf{t}}[1, 1, 1, 1, 0]$, $u_2 = {}^{\mathsf{t}}[1, 1, 1, 2, 1]$, $w = {}^{\mathsf{t}}[-1, 0, 1, 0, 1]$, $w_1 = {}^{\mathsf{t}}[2, 1, -1, 1, 0]$, $w_2 = {}^{\mathsf{t}}[-3, -2, 3, 2, 1]$ Vektoren aus $\mathbb{R}^{5\times 1}$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen $u + \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbb{R}}$, und $w + \langle w_1, w_2\rangle_{\mathbb{R}}$ bezüglich des Standardskalarproduktes.

(23) Geometrisch sinnvolle Näherungslösung für ein unlösbares lineares Gleichungssystem.
Seien $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Bestimmen Sie die kürzeste Lösung der Aufgabe

$$\| \ Ax - b \ \| = Min!$$

Anleitung: Durch die Vorschrift $f(x) = -b + Ax$ für x aus $\mathbb{R}^3$ ist eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erklärt. Sei $\Gamma = f(\mathbb{R}^3)$. Der affine Unterraum Γ enthält im Beispiel den Nullpunkt nicht, aber immerhin einen kürzesten Vektor. Zu diesem gibt es ein kürzestes Urbild. Genau dieses ist gefragt.

(24) Für diejenigen, die über Weihnachten lieber auch noch etwas Theorie betreiben wollen:
Sei K ein Körper. Zeigen Sie für eine affine Abbildung f und eine Affinität h von K^n nach K^n:

(a) f Translation $\Leftrightarrow$ $h \circ f \circ h^{-1}$ Translation

(b) f Spiegelung $\Leftrightarrow$ $h \circ f \circ h^{-1}$ Spiegelung

....

(12) Ein Link dazu (einer von vielen) ist:

`http://www.fz-juelich.de/vislab/vorlesung/download/vorlesung/wv_v3.pdf`

(13) Zur Erinnerung: $e^{(0)} = 0$.

(14) Lesen Sie ggf. Seite 1 des Ergänzungstextes zur linearen Algebra in Vektorräumen mit Skalarprodukt.