Kapitel I Einführung und Orientierung

In diesem kurzen Anfangskapitel geht es zunächst in §1 darum, schon ein wenig anzudeuten, wie wir in diesem Modul, in dem es hauptsächlich um analytische Geometrie gehen wird, arbeiten werden. Dabei erreichen wir u.A. auch geometrische Eigenschaften, wie sie in der so genannten synthetischen Geometrie als Axiome an den Anfang gestellt werden. Dies wird in §3 benutzt, um das Verhältnis zwischen analytischer und synthetischer Geometrie zu erläutern. Außerdem werden in §2 die uns scheinbar unmittelbar verständlichen Begriffe „Punkte“ und „Geraden“ auf ihren tatsächlichen Gehalt hin hinterfragt.

Im weiteren Verlauf des Moduls wird es danach ausschließlich um analytische Geometrie gehen, m.a.W. um Geometrie, die in Vektorräumen zu Hause ist und vom Zusammenspiel von linearer Algebra und geometrischen Vorstellungen lebt. Da das Studium der linearen Algebra bei vielen Teilnehmenden bereits etliche Semester zurückliegt und oft sehr wenig geometrisch geprägt war, werden dieses mal noch deutlich ausführlicher grundlegende Themen der linearen Algebra wiederholt und in geometrisch motivierte Kontexte eingebracht. Dies trifft besonders zu für das nächste umfangreiche Kapitel II „Lineare Algebra und analytische Geometrie“.

Im Folgenden wird oft anfangs V ein Vektorraum über einem Körper K sein, wie Sie es aus der linearen Algebra im ersten Bachelor-Semester gewohnt sind. Da wir nur endlichdimensionale Geometrie betreiben wollen, genügt es im Grunde, sich auf den Fall $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$, zu konzentrieren. Wir werden das auch tun, sobald es von Vorteil ist. Der zu Grunde liegende Körper K wird fast immer aus rationalen oder, allgemeiner, reellen Zahlen bestehen oder in wenigen Fällen ein gängiger endlicher Körper sein. In einigen späteren Abschnitten werden wir sogar ausschließlich reelle Zahlen zu Grunde legen.

Ein großer Vorteil der linearen Algebra ist es, dass bei ganz vielen grundlegenden Begriffen und Resultaten zunächst hinsichtlich der Dimension keine Einschränkung besteht. Dies soll im Folgenden und auch schon in dieser Einleitung nicht dadurch verschleiert werden, dass wir künstlich Definitionen und erste Eigenschaften auf bestimmte Dimensionen beschränken. Bei konkreten geometrischen Problemstellungen, Anwendungen und Aufgaben werden wir es aber am häufigsten mit den Dimensionen 0 bis 5 zu tun haben.

§ 1 Elementare Eigenschaften von Punkten und Geraden in einem Vektorraum.

Die Elemente eines Vektorraums V nennen wir je nach Bedarf Punkte oder Vektoren.(1)

1.1 Definition

Eine Teilmenge g des K-Vektorraums V heißt *Gerade (in Parameterdarstellung)*, wenn mit $a, v \in V, v \neq 0$, gilt: $g = a + Kv$. Dabei ist $a + Kv = \{a + \lambda v : \lambda \in K\}$. Dabei ist a ein *Aufpunkt* oder *Stützvektor*, v ein *Richtungsvektor* und Kv die *Richtung* der Geraden g. Für $a + Kv$ schreiben wir auch $a + \langle v \rangle_K$, wobei $\langle v \rangle_K$ der lineare Aufspann von v ist.

Nach dieser Definition ist eine Gerade eine Punkt- oder Vektormenge, die auf eine bestimmte Weise dargestellt werden kann. Parameterdarstellungen sind hinsichtlich Stütz- und Richtungsvektor nicht eindeutig. Wir werden aber gleich sehen, dass wenigstens die Richtung einer Geraden durch die Gerade als Punktmenge eindeutig bestimmt ist.

Sprechweisen: Wir sagen, die Gerade g geht durch den Punkt b oder b liegt auf g, wenn $b \in g$.

Hinweis zu den Schreibweisen: In aktuellen Schulbüchern findet man auch folgende Schreibweise(2):

„ Die Gerade g durch a mit Richtungsvektor v hat die Parameterdarstellung

$$g : \qquad a + kv,\ k \in \mathbb{R} \quad “$$

---

(1) Zum Unterschied Punkt/Vektor kommen wir später in §2.

(2) siehe Seite 236 in Elemente der Mathematik (EdM) Niedersachsen 11/12, Westermann/Schrödel, 2010.

Dies ist dann letztlich identisch mit unserer Mengenschreibweise mit geschweiften Klammern. **Falsch**, außer wenn $v = 0$, wird es allerdings, wenn geschrieben wird:

$$g = a + kv, \ \ k \in \mathbb{R} \ ,$$

denn g ist eine Menge und $a + kv$ ist für jedes k aus K ein einzelner Punkt.

Für unsere Geraden in Parameterdarstellung gilt folgende

1.2 Regel
Zwei Geraden sind genau dann gleich, wenn sie, bezogen auf irgendwelche Parameterdarstellungen, dieselbe Richtung und mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Insbesondere ist also die Richtung einer Geraden in einer Parameterdarstellung durch die Gerade eindeutig bestimmt.

1.3 Beispiel
$V = \mathbb{R}^2$, $a = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $g = a + \mathbb{R}v = \{ \ \begin{bmatrix}1+\lambda\\1-\lambda\end{bmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \ \}$, $a' = \begin{bmatrix}a'_1\\a'_2\end{bmatrix}$, $v' = \begin{bmatrix}v'_1\\v'_2\end{bmatrix}$, $g' = a' + \mathbb{R}v' = \{ \ \begin{bmatrix}a'_1+\lambda v'_1\\a'_2+\lambda v'_2\end{bmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \ \}$. Wann ist $g = h$?

Als erste Beispiele analytisch geometrischen Arbeitens leiten wir nun ein paar grundlegende Eigenschaften her, wie sie in der synthetischen Geometrie zum Ausgangspunkt genommen werden. Weitere Erläuterungen zur synthetischen Geometrie folgen in §3.

1.4 Beobachtung
(E1) Zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ gibt es genau eine Gerade g, die durch $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ geht. Sie heißt *Verbindungsgerade* zu $a^{(1)}, a^{(2)}$ und hat z.B. die Parameterdarstellung $g = a^{(1)} + K(a^{(2)} - a^{(1)})$. Eine häufige Schreibweise für die Verbindungsgerade von $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ ist $a^{(1)} \vee a^{(2)}$.

1.5 Folgerung
Zwei verschiedene Geraden schneiden sich höchstens in einem Punkt.

1.6 Beobachtung
Sei V ein **zweidimensionaler** K-Vektorraum.

(a) **(E2)** Ist g eine Gerade und b ein Punkt außerhalb von g ($b \in V$, $b \notin g$), dann gibt es genau eine Gerade h derart, dass h durch b geht und g nicht trifft ($b \in h$ und $h \cap g = \varnothing$). h heißt dann *Parallele* zu g durch b.

(b) Zwei verschiedene Geraden haben genau dann keinen Punkt gemeinsam, wenn sie die gleiche Richtung haben.

Definition im zweidimensionalen Fall: zwei Geraden g, h heißen *parallel* ($g||h$), wenn sie die gleiche Richtung haben. $||$ ist dann eine Äquivalenzrelation.[3]

Wie viele Punkte gibt es?

1.7 Beobachtung
(a) Sei V endlichdimensional und $\neq \{0\}$, dann ist $|V| = \begin{cases} \infty & \text{wenn } |K| = \infty \\ |K|^{\dim_K V} & \text{wenn } |K| < \infty \end{cases}$.

(b) Für eine Gerade in einem K-Vektorraum gilt stets $|g| = |K|$ (gleich mächtig).

(c) **(E3)** In einem zweidimensionalen K-Vektorraum gibt es drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

....

[3] Letzteres trifft nicht zu, wenn man, gleiche Geraden nicht parallel nennt, was durchaus auch anzutreffen ist.

1.8 Beispiel

(a) $K = \mathbb{R}$, $|\text{Gerade}| = |\mathbb{R}|$.

(b) $K = \mathbb{Q}$, Geraden sind abzählbar.

(c) Ist K ein endlicher Körper mit p^r Elementen, p eine Primzahl, dann enthält auch jede Gerade p^r Punkte.

(d) $K = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^2$. Alle Geraden bestehen aus nur zwei Punkten und insgesamt gibt es 4 Punkte und 6 Geraden.

Die Beschreibung unserer Geraden kann im zweidimensionalen Fall auch durch eine lineare Gleichung geschehen.

1.9 Beobachtung

Eine Teilmenge g von K^2, K ein Körper, ist genau dann eine Gerade, wenn mit geeigneten $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$ und b in K gilt

$$g = \mathsf{Lös}\,(A, b) \quad \big(= \{x \in K^2 : \; Ax = b\}\big) \; .$$

Diese Darstellung von Geraden in einer Ebene ist Gegenstand der Übungsaufgabe (1). Sie ist Spezialfall der Darstellung affiner Unterräume durch lineare Gleichungssysteme, die wir bald kennen lernen oder ggf. wiederholen werden.

§ 2 Was ist ein Punkt, was ist ein Vektor, was eine Gerade ??

Letztlich kann man das ehrlicherweise nicht genau sagen. Historische Versuche wie „Ein Punkt ist, was keine Ausdehnung hat“ oder „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“[(4)] helfen nicht wirklich weiter. Ich empfehle u.A. den folgenden Link im Internet `http://wikis.zum.de/geowiki/index.php/Eigentlich_ganz_einfach_und_doch_so_kompliziert:_Punkte,_Geraden,_Ebenen` (genau so!). In der mathematisch aufgebauten Geometrie wurde schließlich darauf verzichtet, dazu überhaupt etwas zu sagen. Ein Punkt ist ein Element einer Menge, die wir als Menge unserer Punkte ansehen wollen. Geraden sind dann gewisse Teilmengen von Punkten, die bestimmten Regeln genügen müssen. Wie wir in §1 gesehen haben, sind Geraden in der analytischen Geometrie genau diejenigen Teilmengen von Punkten, die eine gewisse Parameterdarstellung haben oder (im zweidimensionalen Fall) Lösungen einer gewissen linearen Gleichung sind.

Und was sind dann Vektoren? In dem oben zitierten Schulbuch werden Vektoren eingeführt über Verschiebungen im $\mathbb{R}^3$, also über Abbildungen, die wir später auch Translationen nennen werden. Diese Abbildungen werden dann allerdings in Form von Koordinatentripeln dargestellt genauso wie zuvor Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt wurden. Einziger Unterschied: Punkte werden als Zeilen, Vektoren als Spalten geschrieben und mit Punkten wird nicht gerechnet. Diese Unterscheidung wird am Beginn der allgemeinen affinen Geometrie[(5)] formalisiert. Sobald man aber wieder zum konkreten Fall etwa des $\mathbb{R}^3$ zurückkehrt, hat man wieder die gleiche Situation, dass Punkte und Vektoren beide durch unterschiedlich interpretierte Zahlentripel beschrieben werden.

Ein Nachteil der Festlegung auf Verschiebungen beim Vektorbegriff ist m.E., dass es dabei schwieriger wird, ein physikalisches Kräfteparallelogram zu erklären.

Wir werden in diesem Modul keine scharfe begriffliche Trennung zwischen Punkten und Vektoren vornehmen. Die Elemente eines Vektorraumes sind halt „Vektoren“ , wenn sie etwa zu Ecken eines Dreiecks gehören, nennen wir sie auch Punkte. Beim Rechnen schreiben wir Punkte oder Vektoren je nach Bedarf als Zeilen oder Spalten. Verschiebungen (Translationen) sind für uns später sehr spezielle affine Abbildungen: Die Verschiebung um

....

[(4)] Letzteres bei Euklid

[(5)] siehe etwa: Gerd Fischer, Analytische Geometrie, Vieweg, 2001.

w in einem Vektorraum V ist die Abbildung

$$T_w : V \to V,\ v \mapsto v + w \quad .$$

Die Addition von als Verschiebungen interpretierten Vektoren erscheint dann als Hintereinanderausführung von Abbildungen:

$$T_w \circ T_{w'} : V \to V,\ v \mapsto T_w(T_{w'}(v)) \quad .$$

Dabei ist auf Grund der Kommutativität der Vektoraddition erwartungsgemäß

$$T_w \circ T_{w'} = T_{w+w'} \ ,$$

denn es gilt punktweise für $v \in V$

$$T_w \circ T_{w'}(v) = T_w(T_{w'}(v)) = (v+w')+w = v+(w+w') = T_{w+w'}(v) = (v+w)+w' = T_{w'} \circ T_w(v)) \ .$$

§ 3 Zum Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie.

Häufig nimmt in Geometrieveranstaltungen an pädagogischen Hochschulen und Universitäten die so genannte **Inzidenzgeometrie** und/oder die weiterführende **synthetische Geometrie** einen breiten Raum ein. Dabei werden „geometrisch einleuchtende“ Eigenschaften von „Punkten“, „Geraden“, „Winkeln“, etc. als Axiome für Elemente von nicht näher beschriebenen Mengen an den Anfang gestellt und die dann gültigen „geometrischen“ Sätze allein aus den jeweiligen Axiomen hergeleitet. Was etwa ein „Punkt“ oder eine „Gerade“ ist, wird nicht mehr thematisiert. Unter einer **Geometrie** versteht man dann ein bestimmtes „geometrisch motiviertes“ Axiomensystem zusammen mit den daraus herleitbaren Sätzen.

Das Vorgehen der synthetischen Geometrie lässt sich sehr gut illustrieren am Beispiel ebener Inzidenzgeometrien. Letztere sind zu gleich auch ein leicht zugängliches Beispiel für mathematisch-deduktives Arbeiten. Beides erklärt m.E. zu einem wichtigen Teil deren Präsenz in einführenden Geometrieveranstaltungen.

Sei P eine Menge. Ihre Elemente werden „Punkte“ genannt. Sei weiter G eine Menge von Teilmengen von P. Die Elemente von G werden „Geraden“ genannt. Man sagt, ein Punkt p aus P liegt auf der Geraden g aus G, oder g geht durch p, wenn $p \in g$. Man sagt, Punkte sind kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Das Paar (P,G) wird „ebene affine Inzidenzgeometrie“ genannt, wenn folgende Axiome erfüllt sind.

$\boldsymbol{A_1}$ Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

$\boldsymbol{A_2}$ Zu einer Geraden g und einem Punkt a, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h durch a ohne gemeinsamen Punkt mit g.

$\boldsymbol{A_3}$ Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach $\boldsymbol{A_1}$ durch zwei verschieden Punkte a, b festgelegte Gerade wird mit $a \vee b$ bezeichnet. Wenn zwei Geraden g, h sich nicht schneiden, dann werden sie parallel genannt und es wird $g||h$ geschrieben.

Wie wir in §1 gesehen haben sind diese drei Axiome stets erfüllt, wenn P ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K ist und wenn G die Menge der Geraden ist, wie wir sie in §1 betrachtet haben. Insbesondere trifft dies natürlich dann auch für $K = \mathbb{R}$ und $P = \mathbb{R}^2$ zu, also die vermeintlich vertraute reelle Zahlenebene mit den üblichen „geraden“ Geraden. Hierzu bietet die Aufgabe (3) eine Relativierung.

Die obigen drei Axiome sind im Kontext der analytischen Geometrie lediglich elementare Eigenschaften (siehe **(E1),(E2),(E3)** in §1) in einem bereits auf andere Weise axiomatisch entworfenen Kontext: Körperaxiome und Vektorraumaxiome.

Einer der Höhepunkte der weiterführenden synthetischen Geometrie wird erreicht durch Hinzunahme des folgenden geometrisch einleuchtenden Axioms

A₄ Seien die Punkte z, a, a' verschieden und kollinear, ebenso z, b, b' und z, c, c'. Außerdem seien die drei dadurch gegebenen Geraden $z \vee a, z \vee b, z \vee c$ verschieden.
Wenn dann $a \vee b \,||\, a' \vee b'$ und $b \vee c \,||\, b' \vee c'$, dann ist auch $c \vee a \,||\, c' \vee a'$.
(affiner Satz von Desargues (Gérard, 1593-1662))

Ein Applet zu $\boldsymbol{A_4}$ ist über die Vorlesungsseite von 2009/10 im Internet zugänglich.

Nach einiger Anstrengung kann folgendes Resultat erreicht werden

Satz 4: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G). Gilt zusätzlich $\boldsymbol{A_4}$, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der Geraden in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Graden in K^2 mit einem Körper K, der allerdings nicht notwendigerweise kommutativ[(6)] ist.

Mindestens genauso erstaunlich ist das folgende Resultat

Satz 5: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G). Gilt zusätzlich $\boldsymbol{A_5}$, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der Geraden in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Graden in K^2 mit einem **kommutativen** Körper K. Dabei ist $\boldsymbol{A_5}$ das folgende ebenfalls geometrisch einleuchtende Axiom:

$\boldsymbol{A_5}$ Seien die Punkte a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 jeweils verschieden und kollinear auf verschiedenen Geraden.
Wenn dann $a_1 \vee b_2 \,||\, a_2 \vee b_3$ und $a_2 \vee b_1 \,||\, a_3 \vee b_2$, dann ist auch $a_1 \vee b_1 \,||\, a_3 \vee b_3$.
(affiner Satz von Pappos (von Alexandria, ca 300 n. Chr.))

Auch zu $\boldsymbol{A_5}$ ist ein Applet über die Vorlesungsseite von 2009/10 im Internet zugänglich.

Eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der Geometrie als Wissenschaft bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts spielte die Frage nach einem Axiomensystem das so erweitert ist, dass schließlich bis auf „Isomorphie“ nur noch eine reelle Zahlenebene, bzw ein reeller dreidimensionaler Raum (jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen für Winkel- und Längenmessung) in Frage kommt, also genau der Kontext, von dem die reelle euklidische analytische Geometrie der Ebene und des Raumes von Anfang an ausgeht.

Ein noch nicht vollständiger Vorläufer für ein solches Axiomensystem ist bereits von Euklid aufgestellt und untersucht worden. Ein vollständiges Axiomensystem für die dreidimensionale (reelle) euklidische Geometrie ist von David Hilbert 1899 angegeben worden. Es wird, modifiziert für den einfacheren Fall einer Ebene, in dem unten angegeben Buch von Horst Knörrer entwickelt.

Eine Geometrie, der das Hilbert'sche Axiomensystem zu Grunde liegt, wird häufig als Euklidische Geometrie des Raumes bezeichnet. Sie ist tatsächlich bis auf eine Inzidenz, Winkel und Länge erhaltende bijektive Abbildung („Isomorphie“) die gleiche, die wir heute als analytische Geometrie des $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt oder analytische euklidische Geometrie des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen. Es handelt sich also aus heutiger Sicht lediglich um einen Spezialfall der analytischen Geometrie.

Literaturangaben:

Klassiker: Günter Pickert: Ebene Inzidenzgeometrie, Diesterweg, 1971.
Meine Empfehlung: Max Köcher und Aloys Krieg: Ebene Geometrie, Springer, 2007.
Horst Knörrer: Geometrie, Vieweg, 2006.
Siegfried Krauter: Einführung in die endliche Geometrie, Skript PH Ludwigsburg, 2005.

Es gibt natürlich viel mehr Literatur dazu, vieles davon in der Bereichsbibliothek.

....

[(6)]Im nicht-kommutativen Fall spricht man von einem Schiefkörper. Wichtige Teile der linearen Algebra können unbeschadet auch über nicht-kommutativen Körpern entwickelt werden. Dazu gehören lineare Gleichungen und deren Lösungsräume bzw. affine Unterräume. Statt von Vektorräumen wird dann meist von Modulen über einem Schiefkörper gesprochen. Ein Modul über einem nicht unbedingt kommutativen Körper K wird K-Vektorraum genannt. Die Theorie dazu findet man in den etwas umfangreicheren Algebralehrbüchern, wie z.B. dem von Günter Scheja und Uwe Storch im Teil I.