Kapitel II Lineare Algebra und analytische Geometrie

§ 4 Punkte, Geraden, Ebenen, affine Unterräume in einem Vektorraum.

Wie bisher ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K, oft ist $V = K^n$ und K einer der Ihnen geläufigen Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, ...$

4.1 Definition

Sei Γ eine Teilmenge von V. Γ heißt *affiner Unterraum von* V, wenn $V = \varnothing$ oder $\Gamma = a + U$ mit a aus V und mit einem Untervektorraum U von V. Dabei ist $a + U = \{a + u : \ u \in U\}$.
U heißt *Richtung* von Γ, die Vektoren (im Zweifelsfall $\neq 0$) aus U sind *Richtungsvektoren* und a ist ein *Stützvektor* oder ein *Aufpunkt*.
Man setzt fest: $\mathsf{dim}_K \Gamma := \mathsf{dim}_K U$ und $\mathsf{dim}_K \varnothing := -1$.
Der affine Unterraum Γ heißt *Punkt, Gerade*, *Ebene* oder *Hyperebene*, wenn $\mathsf{dim}_K \Gamma = 0, 1, 2$ oder $\mathsf{dim}_K V - 1$.
Nach Wahl einer Basis oder eines Erzeugendensystems $u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$ für U hat U die Darstellung $U = \langle u^{(1)}, \ldots, u^{(r)} \rangle_K$ [(1)] und $a + U$ heißt dann *affiner Unterraum in Parameterdarstellung.* Manchmal sagen wir das auch schon vor der Wahl eines Erzeugendensystems, da man ja im konkreten Fall eines bestimmen könnte. ∘

Genau genommen geht es nur um Parameterdarstellungen für Untervektorräume und dann noch um die Wahl eines Aufpunktes. Daher interessiert uns folgendes Resultat aus der linearen Algebra zur Mehrdeutigkeit von Parameterdarstellungen.

4.2 Beobachtung

Seien $u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}$ aus K^n. Sei $r = s$, Dann gilt

$$\langle u^{(1)}, \ldots, u^{(r)} \rangle_K = \langle w^{(1)}, \ldots, w^{(r)} \rangle_K \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Mit einer invertierbaren Matrix } Q \in K^{r \times r} \text{ ist} \\ [u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}]Q = [w^{(1)}, \ldots, w^{(r)}] \\ (\text{ oder } [w^{(1)}, \ldots, w^{(r)}]Q^{-1} = [u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}] \ ) \end{array}$$

Man kann insbesondere (warum?) die Matrix $[u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}]$ durch elementare *Spalten*-Umformungen in die Matrix $[w^{(1)}, \ldots, w^{(r)}]$ überführen oder umgekehrt.
Was bedeutet die Aussage im Fall $r = 1$?
Für LA-Spezialisten: Wie muss die Aussage lauten, wenn wir nicht $r = s$ voraussetzen ? ∘

Stets ist aber die Richtung eines affinen Unterraums eindeutig. Regel 2 aus §1 gilt unverändert:

4.3 Beobachtung

(a) Zwei affine Unterräume sind genau dann gleich, wenn sie, bezogen auf irgendwelche Parameterdarstellungen, dieselbe Richtung und mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

(b) Die Richtung eines affinen Unterraumes in einer Parameterdarstellung ist eindeutig bestimmt.

(c) Als Aufpunkt kann jeder beliebige Punkt aus einem affinen Unterraum gewählt werden.

∘

4.4 Beispiel

Sind die beiden folgenden Ebenen gleich?

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

....

[(1)] Zur Erinnerung: Der lineare Aufspann von Vektoren $w^{(1)}, \ldots, w^{(m)}$ in einem Vektorraum ist die Menge $\langle w^{(1)}, \ldots, w^{(m)} \rangle_K = \{\lambda_1 w^{(1)} + \cdots + \lambda_m w^{(m)} : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K\}$ und stets ein Untervektorraum.

Spaltenumformungen (vgl. Beobachtung 4.2) zeigen zunächst, dass die Richtungen übereinstimmen, denn $\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\3&2\end{bmatrix}$ hat ebenso wie $\begin{bmatrix}1&5\\7&5\\10&8\end{bmatrix}$ die Matrix $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1/5&7/5\end{bmatrix}$ als normierte Spaltenstufenform (oder, dem englischen Sprachgebrauch angepasst, reduzierte Spalten-Echelonform (rcef)). Nun ist noch zu klären, ob $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$. Da

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} ,$$

ist dies der Fall und mit Beobachtung 4.3 ergibt sich $\Gamma = \Delta$.
Mit der Berechnung des Schnittes affiner Unterräume beschäftigen wir uns demnächst. ∘

Als Nächstes wollen wir affine Unterräume als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme darstellen. Dazu ist es wieder notwendig, sich zunächst einmal an die Ergebnisse aus der linearen Algebra zu erinnern und diese für unseren Modul einheitlich zu beschreiben und zu bezeichnen. Sei K ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* ist gegeben durch eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ und einen Vektor $b \in K^{m\times 1}$ und wird meist in der kompakten Form $Ax = b$ angeschrieben[(2)] verbunden mit der Aufforderung, Vektoren $v \in K^n$ zu finden derart, dass nach Einsetzen von v für den unbestimmten Vektor x eine gültige Gleichung $Av = b$ entsteht. Die Menge all dieser Vektoren ist die *Lösungsmenge*

$$\mathsf{Lös}\,(A, b) = \{v \in K^n : \ Av = b\} .$$

Die grundlegenden Ergebnisse aus der linearen Algebra dazu sind:

4.5 Satz

(a) $\mathsf{Lös}\,(A, b) = \varnothing$ oder $\mathsf{Lös}\,(A, b) = a + \mathsf{Lös}\,(A, 0)$. Dabei ist $\mathsf{Lös}\,(A, 0)$ ein Untervektorraum. M.a.W.: $\mathsf{Lös}\,(A, b)$ ist stets ein affiner Unterraum.

(b) Wenn es Lösungen gibt, dann ist $\mathsf{dim}_K \mathsf{Lös}\,(A, b) = \mathsf{dim}_K \mathsf{Lös}\,(A, 0) = n - \mathsf{Rang}\, A$.

(c) „geometrisches“ Lösbarkeitskriterium:

$$\mathsf{Lös}\,(A, b) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad b \in \mathsf{SR}\,(A)\ ^{(3)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{Rang}\, A = \mathsf{Rang}\,[A|b]$$

(d) Mit jeder invertierbaren $m \times m$-Matrix P ist

$$\mathsf{Lös}\,(PA, Pb) = \mathsf{Lös}\,(A, b) .$$

Insbesondere verändern elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Matrix $[A, b]$ die Lösungsmenge nicht.

(e) Mit jeder invertierbaren $n \times n$-Matrix Q ist

$$Q \cdot \mathsf{Lös}\,(A\,Q, b) = \mathsf{Lös}\,(A, b) .$$

∘

In der Vorlesung wird Satz 4.5 nicht bewiesen. Wir illustrieren das nun alles an Beispielen. Dabei werden wir auch sehen oder wiederholen wie man (einfache) lineare Gleichungssysteme (mit schönen Daten) durch elementare Umformungen lösen kann.

....

(2) Nur wenn $m > 1$, liegt wirklich ein Gleichungssystem vor. Wenn $m = 1$, dann liegt eine einzelne lineare Gleichung vor aber möglicherweise mit mehreren Unbekannten, den Komponenten von x.

(3) Spaltenraum der Matrix A

4.6 Beispiel

(a) $n = 2, K = \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} 2r + s &= 1 \qquad (1) \\ r + s &= 0 \qquad (2) \\ 3r - 2s &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Gleichung (2) ergibt s=-r. Einsetzen in Gleichung (1) ergibt r=1. Das Gleichungssystem ist aber damit wegen Gleichung (3) nicht lösbar! Das System in Matrixform lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$

Hier ist $\mathsf{Rang}\, A = 2$ und $\mathsf{Rang}\, [A, b] = 3$ (vgl. Satz 4.5 (c)).

(b) Spätestens ab n=3 ist i.A. die Matrixschreibweise auch für die Handrechnung vorteilhafter. Davon abgesehen ist sie auch die Grundlage für Dateneingaben in Rechner, die lineare Gleichungssysteme lösen können.

Gegeben seien (über $\mathbb{Q}$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \; .$$

Elementare Zeilenumformungen an der Matrix $[A|b]$ führen zur Matrix

$$[A'|b'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & | & 2 \end{bmatrix} \; .$$

Satz 4.5 (d) sagt uns nun (falls wir richtig gerechnet haben), dass

$$\mathsf{Lös}\,(A', b') = \mathsf{Lös}\,(A, b) \; .$$

Da ich auch die Transformationsmatrix P (Produkt der zu meinen Zeilenumformungen gehörenden Elementarmatrizen) mit $PA = A', Pb = b'$ angeben will, führe ich die gleiche Rechnung an der Matrix $\begin{bmatrix} A & |b & |E_3 \end{bmatrix}$ durch mit der 3×3-Einheitsmatrix E_3. Dann erhalte ich nämlich als Ergebnis $\begin{bmatrix} A' & | & b' & | & P \end{bmatrix}$ (Begründung?).

Die Bestimmung von $\mathsf{Lös}\,(A', b')$ kann auf verschiedene Weise erfolgen, z.B. durch so genanntes Rückwärtseinsetzen, bei dem zuerst die Lösungen der untersten Gleichung des Gleichungssystems $A'x = b'$ bestimmt werden und dann nach und nach die der jeweils darüber liegenden. Insbesondere wenn ein Gleichungssystem für mehrere rechte Seiten gelöst werden soll ist auch hier die Matrixschreibweise übersichtlicher und vorteilhaft.Nachdem eine Zeilenstufenform erreicht wurde, kann man an die Matrix A' einen Einheitsblock wie folgt anfügen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; .$$

Mit Spaltenumformungen wird der obere Block A' in eine Spaltenstufenform gebracht:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & -5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3|0 \\ - \\ Q \end{bmatrix}$$

In unserem Beispiel ist nun für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ der Vektor $Q \cdot \begin{bmatrix} b' \\ - \\ \lambda \end{bmatrix}$ eine Lösung (vgl. Satz 4.5. (e)) und $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) = Q \cdot \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A'b') = Q \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{Q} \right\}$.

Beachte: $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)$ ist nach Satz 4.5 (a) ein affiner Unterraum. Unser Rechenergebnis zeigt, dass seine Dimension 1 ist. Es liegt also eine Gerade im 4-dimensionalen Raum $\mathbb{Q}^4$ vor. ∘

Darstellung affiner Unterräume als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

4.7 Satz

Eine Teilmenge Γ von K^n ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn mit einer Matrix $A \in K^{m\times n}$, m geeignet, und einem Vektor b aus K^m gilt: $\Gamma = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)$. ∘

4.8 Beispiel

(a) Wie erhält man ein Gleichungssystem für einen Untervektorraum U von K^n (affiner Unterraum durch 0) in Parameterdarstellung?
Sei etwa $U = \langle u^{(1)}, \ldots, u^{(r)} \rangle_K$. Bestimme (siehe Beweis von Satz 1.8) ein Erzeugendensystem $w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}$ von $\mathsf{L\ddot{o}s}\,\left(\begin{bmatrix} {}^t u^{(1)} \\ \vdots \\ {}^t u^{(r)} \end{bmatrix}, 0 \right)$.[4] Dann ist $U = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,0)$ mit $A = \begin{bmatrix} {}^t w^{(1)} \\ \vdots \\ {}^t w^{(s)} \end{bmatrix}$.

Z.B. erhält man für $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_K$ nach kurzer Rechnung

$$U = \mathsf{L\ddot{o}s}\,\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, 0 \right) .$$

Beachte: Wenn z.B. $K = \mathbb{Z}_2$, dann ist $-1 = 1$ und $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

Wenn $K = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ (z.B.) ausgestattet ist mit dem Standardskalarprodukt, dann ist ....

[4] Im Kontext der linearen Algebra und der analytischen Geometrie ziehe ich die Schreibweise ${}^tA$ der Schreibweise A^T für die transponierte Matrix vor. Oft hat T eine andere Bedeutung und A^{Symbol}, beschreibt bei quadratischen Matrizen normalerweise eine Matrizenpotenz.

$\mathsf{Lös}\left(\begin{bmatrix} {}^{\mathsf{t}}u^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{\mathsf{t}}u^{(r)} \end{bmatrix}, 0\right) = U^{\perp}$ und (!) $U \cap U^{\perp} = \{0\},\ U + U^{\perp} = \mathbb{R}^n$. Was bewirkt dies für $n = 2, 3$? Auf Normalenvektoren und Ähnliches kommen wir später zurück. Dass man affine Unterräume durch lineare Gleichungen beschreiben kann hat jedenfalls zunächst nichts mit der vertrauten Orthogonalität in einem Vektorraum mit Skalarprodukt zu tun.

(b) Gleichungssystem für eine Gerade Γ in $K^n, n \geq 2$.
Sei etwa $\Gamma = a + Ku, u \neq 0$. Dann ist $\mathsf{dim}_K \mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}u, 0) = n - 1$. Sei nun $w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}$ eine Basis des Lösungsraumes (oder auch nur ein Erzeugendensystem), dann erhält man mit $A = \begin{bmatrix} {}^{\mathsf{t}}w^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{\mathsf{t}}w^{(s)} \end{bmatrix}$ und $b = Aa$ als Ergebnis: $\Gamma = \mathsf{Lös}\,(A, b)$. Wenn etwa $n = 3,\ K = \mathbb{Q}$ und $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, dann ist $w^{(1)}, w^{(2)}$ mit $w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, w^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ eine mögliche Basis von $\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}u, 0)$ und wir erhalten: $\Gamma = \mathsf{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. Probe! Vergleiche auch mit Beispiel 4.6 (b).

(c) Gleichung einer Ebene in K^3. Seien $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_K,\ a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\Gamma = a + U$. U ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von K^3. Mit $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ erhält man $\mathsf{Lös}\,(B, 0) = \langle w \rangle_K$ mit $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Setze $A := {}^{\mathsf{t}}w$ und $b = Aa$, dann ist

$$\Gamma = \mathsf{Lös}\,(A, b) = \mathsf{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, 1 + 1 + 1\right) .$$

(d) Bemerkung für Neugierige: *Kontrollmatrix eines Codes.*
Ein linearer Code[5] ist nichts anderes als ein Untervektorraum eines Vektorraums K^n mit einem endlichen Körper K mit besonderen für die Kodierung interessanten geometrischen Eigenschaften. Bekannteste Vertreter sind Hamming Codes, so genannte BCH-Codes oder etwa Reed-Solomon Codes, die in alltäglichen Produkten der Informationsverarbeitung massenhaft zur Anwendung kommen. Sei also C im Spezialfall des Körpers $\mathbb{Z}_2$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Z}_2^n$. Eine Kontrollmatrix $H \in \mathbb{Z}_2^{m \times n}$ von C ist einfach eine Matrix mit der Eigenschaft $C = \mathsf{Lös}\,(H, 0)$.
Beispiel: Der so genannte (7,4)- *Hamming Code* über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ wird erzeugt von den Zeilen der folgenden Matrix G, einer so genannten *Erzeugermatrix* des Codes:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Es handelt sich um einen 4-dimensionalen Unterraum des 7-dimensionalen Raumes $\mathbb{Z}_2^7$. Jede Kontrollmatrix dieses Codes hat als *Spalten* alle von 0 verschiedenen Vektoren von $\mathbb{Z}_2^3$ in einer gewissen Anordnung.

∘

[5] Mehr zu linearen und anderen Codes finden Sie z.B. in zugänglicher Form in dem Buch *Einführung in die Kombinatorik* von Konrad Jacobs und Dieter Jungnickel, de Gruyter, 2. Auflage 2004.

Wie eindeutig sind A und b bei Satz 4.7 ?

4.9 Beobachtung

Mit $A \in K^{m\times n}, A' \in K^{m\times n}, b \in K^m, b' \in K^m$. gilt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,0) = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A',0) \;&\Leftrightarrow\; \mathsf{ZR}\,(A) = \mathsf{ZR}\,(A') \quad ^{(6)}\\
\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A',b') \;&\Leftrightarrow\; \mathsf{ZR}\,([A,b]) = \mathsf{ZR}\,([A',b'])\\
&\Leftrightarrow\; \text{Es gibt eine invertierbare Matrix } P \in K^{m\times m}\\
&\;\; \text{derart, dass} \quad PA = A' \text{ und } Pb = b'
\end{aligned}$$

∘

Vergleiche mit Satz 4.5 (d) und Beobachtung 4.2.

4.10 Beispiel

(a) Im Beispiel 4.8 (a) kann man gut sehen, wie die gerade beschriebene Mehrdeutigkeit zustande kommt, denn die Auswahl der $w^{(i)}$ ist willkürlich.

(b) Wie sieht es im Beispiel 4.4 aus ?
Stelle Γ oder Δ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems dar.

(c) Ein leicht überschaubares Beispiel: Seien $\Gamma = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b), \Gamma' = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A',b')$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ b' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ist $\Gamma = \Gamma'$ und wenn nein, schneiden sich die beiden ?

∘

Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume.

Zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ in einem Vektorraum gibt es nach Eigenschaft (E1) in §1 genau eine Verbindungsgerade, die wir mit $a^{(1)} \vee a^{(2)}$ bezeichnet haben. Für affine Unterräume gilt nun:

4.11 Satz

Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen.
Eine Teilmenge M eines K-Vektorraumes V ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ auch deren Verbindungsgerade $a^{(1)} \vee a^{(2)}$ vollständig in M liegt. ∘

Falls $K = \mathbb{Z}_2$, lässt sich leicht ein Gegenbeispiel angeben in Gestalt der Teilmenge $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ von $\mathbb{Z}_2^2$.

„Normalen"-Formen affiner Unterräume.

Sei zunächst K noch ein beliebiger Körper. Wie bereits im Beispiel 4.8 (a) erwähnt, gilt mit einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ und mit $b \in K^n$ die Beziehung

$$\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) = \left(\mathsf{SR}\,({}^{\mathsf{t}}A)\right)^{\perp}.$$

Dabei ist für eine nicht leere Teilmenge $M \subseteq K^n$

$$M^{\perp} = \{w \in K^n :\ {}^{\mathsf{t}}u \cdot w = 0 \ \text{ für alle } \ u \in M\}.$$

....

(5) ZR bedeutet: Zeilenraum.

Man rechnet leicht nach, dass $M^\perp$ stets ein Untervektorraum ist. Ist U ein Untervektorraum, etwa $U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$, dann ist $U^\perp = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A, 0)$ mit $A = \begin{bmatrix} {}^{\mathsf{t}}u^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{\mathsf{t}}u^{(r)} \end{bmatrix}$ und $\mathsf{dim}_K U^\perp = n - \mathsf{dim}_K U$ (Siehe Satz 4.5 (b)). Wenn nun K ein Unterkörper der reellen Zahlen ist, dann lässt sich leicht nachrechnen, dass für einen Untervektorraum U von K^n stets $U \cap U^\perp = \{0\}$ zutrifft (vgl. Bemerkung in Beispiel 4.8(a)) und dann ist aus Dimensionsgründen $U + U^\perp = K^n$. Einen Normalenvektor für einen affinen Unterraum im vertrauten Sinne kann man daher finden, wenn $\mathsf{dim}_K U^\perp = 1$.

4.12 Satz

Sei $\Gamma = a + U$ affiner Unterraum mit $a \in K^n$ und mit einem Untervektorraum U von K^n.
Γ sei eine Hyperebene, also $\mathsf{dim}_K \Gamma = n - 1$ und $\mathsf{dim}_K U^\perp = 1$

(a) Wenn $U + U^\perp = K^n$ und folglich und $U \cap U^\perp = \{0\}$, dann hat Γ eine *Normalendarstellung* oder *Normalenform* wie folgt

$$\Gamma = u^* + (u^*)^\perp \quad \text{mit} \;\; u^* \in U^\perp \;, \;\; \textbf{falls} \;\; 0 \notin \Gamma.$$

u^* ist dabei durch Γ eindeutig bestimmt.
Wenn Γ durch 0 geht, dann ist $\Gamma = (u^*)^\perp$ mit $u^* \in U^\perp$. Zwangsläufig ist in beiden Fällen $u^* \neq 0$.
Ist insbesondere $U = \mathsf{L\ddot{o}s}\,({}^{\mathsf{t}}v, b)$ mit $v \in K^n$ und a' aus Γ, dann ist $\Gamma = a' + v^\perp$. Beachte, dass dabei nicht unbedingt v aus Γ sein muss.

(b) Wenn K ein Unterkörper der reellen Zahlen ist (z.B. $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ selbst oder $K = \mathbb{A}$, dem Körper der algebraischen Zahlen), dann ist stets $U + U^\perp = K^n$.[7]

∘

4.13 Beispiel

(a) Hyperebene in $\mathbb{R}^4$: Sei $\Gamma = \mathsf{L\ddot{o}s}\,({}^{\mathsf{t}}v, 1)$ mit ${}^{\mathsf{t}}v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dann ist $\Gamma = e^{(1)} + v^\perp$ und $v \notin \Gamma$. Allerdings ist $\frac{1}{4}v$ in Γ. Ausgehend von der Parameterdarstellung

$$\Gamma = e^{(1)} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

erhält man $U^\perp = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und dann entsprechend $u^* = \frac{1}{4}v$ und $\Gamma = u^* + (u^*)^\perp$.

(b) Hat Γ auch eine Normalendarstellung, über $K = \mathbb{Z}_2$? Alle Anfangsdaten lassen sich jedenfalls auch über $\mathbb{Z}_2$ interpretieren. Wie sieht es über $\mathbb{Z}_3$ aus?

(c) Fortsetzung von Beispiel/Bemerkung 4.8 (d): Ein linearer Code C heißt selbstorthogonal, wenn $C \subseteq C^\perp$ und selbstdual, wenn $C = C^\perp$. Ein relevantes Beispiel eines selbstdualen Codes in $\mathbb{Z}_2^8$ erhält man, wenn man die um die Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ erweiterte Matrix G aus Beispiel 4.8 (d) als Erzeugermatrix benutzt. Selbstduale Codes sind leichter zu dekodieren.

∘

[7] Wenn für zwei Untervektorräume U, W von V gilt: $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$, dann wird dies häufig durch die Schreibweise $U \oplus W = V$ zum Ausdruck gebracht.

Affin-lineare Beschreibung affiner Unterräume.
Die folgende weitere Beschreibungsart für affine Unterräume leitet, wie Sie bald sehen werden, methodisch bereits zum nächsten Abschnitt über.

4.14 Definition
Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^{(i)}$ von Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$ aus einem K-Vektorraum V mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aus K heißt *affine Kombination* oder *Affinkombination*, wenn

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \ .$$

∘

4.15 Beispiel
Affinkombinationen von Punkten aus einem affinen Unterraum treten auf natürliche Weise schon bei Geraden auf, denn ein Punkt p liegt genau dann auf der Geraden $a + Ku$, wenn

$$p = (1 - \lambda)a + \lambda(a + u) = a + \lambda u \quad \text{mit einem } \lambda \text{ aus } K.$$

∘

Ganz analog dazu, dass ein Untervektorraum als nicht leere Teilmenge M eines Vektorraumes dadurch charakterisiert ist, dass er mit je endlich vielen Vektoren auch alle deren Linearkombinationen enthält, oder dadurch, dass er endlich viele Vektoren enthält, derart, dass die Menge aller ihrer Linearkombinationen gerade M ergibt, gilt für affine Unterräume (die leer sein dürfen):

4.16 Satz
Für eine Teilmenge M des endlichdimensionalen K-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) M ist ein affiner Unterraum.

(b) Mit je endlich vielen Vektoren aus M liegen auch alle deren Affinkombinationen in M.

(c) Es gibt endliche viele Vektoren in M derart, dass M die Menge aller ihrer Affinkombinationen ist.

∘

Man kann Satz 4.16 als Erweiterung von Satz 4.11 ansehen.

4.17 Beispiel
Sei E eine Ebene, etwa $E = a + U$ mit einem zweidimensionalen Untervektorraum U mit einer Basis $u^{(1)}, u^{(2)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} E &= \{a + \mu u^{(1)} + \nu u^{(2)} : \ \mu, \nu \in K\} \\ &= \{(1 - \mu - \nu)a + \mu(a + u^{(1)}) + \nu(a + u^{(2)}) : \ \mu, \nu \in K\} \\ &= \{\lambda a + \mu(a + u^{(1)}) + \nu(a + u^{(2)}) : \ \lambda, \mu, \nu \in K, \lambda + \mu + \nu = 1\} \ . \end{aligned}$$

∘

Wir haben inzwischen bereits fünf Beschreibungsarten affiner Unterräume kennengelernt:

- Parameterdarstellungen,
- Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme,
- Mengen die bezüglich Verbindungsgeraden abgeschlossen sind,
- Normalenformen,
- Mengen die hinsichtlich affiner Kombinationen abgeschlossen sind.