Kapitel II   Lineare Algebra und analytische Geometrie

§ 5 Schnitt, Verbindung und Erzeugung affiner Unterräume: Fortsetzung

Wann liegt ein Punkt auf einem affinen Unterraum?
Wann haben zwei affine Unterräume eine Punkt gemeinsam?
Wie bestimme ich gemeinsame Punkten von affinen Unterräumen?
Was ergibt das Verbinden je zweier Punkte aus zwei verschiedenen Geraden?
Was ist die richtige Verallgemeinerung des Begriffes „Verbindungsgerade“ zweier verschiedener Punkte für beliebige affine Unterräume?
Wie viele Punkte brauche ich mindestens, um einen affinen Unterraum durch Affinkombinationen zu erzeugen?

5.1 Beobachtung.

Gegeben sind ein Punkt p und ein affiner Unterraum Γ in K^n. Liegt p auf Γ?

(a) Wenn Γ in der Form $\Gamma = a + \langle u^{(1)}, \ldots, u^{(r)} \rangle_K$ gegeben ist, dann liegt p genau dann in Γ, wenn $\mathsf{Lös}\,([u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}], p - a)$ nicht leer ist.

(b) Wenn Γ in der Form $\Gamma = \mathsf{Lös}\,(A, b)$ gegeben ist, dann liegt p auf Γ genau dann, wenn $Ap = b$.

∘

5.2 Satz

Seien Γ, Δ affine Unterräume von K^n.

(a) Seien $\Gamma = a + U, \Delta = b + W$ mit a, b aus K und Untervektorräumen U, W von K^n.

(i) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; b - a \in U + W$

(ii) Wenn $U = \langle u^{(1)}, \ldots, u^{(r)} \rangle_K$, $W = \langle w^{(1)}, \ldots, w^{(s)} \rangle_K$, $M_U = \left[u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}\right]$ und $M_W = \left[w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}\right]$, dann gilt

$$\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \mathsf{Lös}\left(\left[M_U, -M_W\right], b - a\right) \neq \varnothing$$

und wenn $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma \cap \Delta &= a + M_U \cdot \left[E_r \mid 0\right] \cdot \mathsf{Lös}\left(\left[M_U, -M_W\right], b - a\right) \\ &= b + M_W \cdot \left[0 \mid E_s\right] \cdot \mathsf{Lös}\left(\left[M_U, -M_W\right], b - a\right) \end{aligned}$$

(b) Wenn $\Gamma = \mathsf{Lös}\,(A, b), \Delta = \mathsf{Lös}\,(B, c)$ mit $A \in K^{l \times n}, B \in K^{m \times n}, b \in K^l, c \in K^m$, dann ist einfach

$$\Gamma \cap \Delta = \mathsf{Lös}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \right).$$

∘

5.3 Beispiele

∘

5.4 Satz

Seien Γ, Δ affine Unterräume eines K-Vektorraums, etwa wie eben $\Gamma = a + U, \Delta = b + W$. Ferner sei

$$M_{\Gamma,\Delta} := \bigcup_{\substack{a \in \Gamma \\ b \in \Delta}} (a \vee b)\ .$$

Genau dann ist $M_{\Gamma,\Delta}$ eine affiner Unterraum, wenn $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ oder wenn $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ und zugleich $U = W$. ∘

Das ziehen von Verbindungsgeraden reicht nach diesem Ergebnis also nicht immer aus, um einen möglichst kleinen affinen Unterraum zu konstruieren, der zwei gegebene affine Unterräume enthält. Die affin-lineare Darstellung affiner Unterräume führt uns zur „richtigen“ Verallgemeinerung des Begriffs „Verbindungsgeraden“.

Verbindungsräume

5.5 Definition
Sei M eine Teilmenge von V.

$$\begin{aligned} \overline{M}^{\,\mathsf{aff}} &:= \Big\{ \sum_{\imath=0}^{r} \lambda_i v^{(i)} : \ r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v^{(i)} \in M, \ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \Big\} \\ &= \big\{ \text{Affinkombinationen von Punkten aus } M \big\} \end{aligned}$$

heißt *affine Hülle von* M oder *affines Erzeugnis von* M. Man sagt auch: die Punkte aus M *erzeugen* $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$ *affin.* ∘

Die wichtigsten Eigenschaften von affinen Hüllen sind völlig analog zu denen linearer Hüllen:

5.6 Satz

(a) $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$ ist affiner Unterraum und $M \subseteq \overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$.

(b) $\overline{\overline{M}^{\,\mathsf{aff}}}^{\,\mathsf{aff}} = \overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$.

(c) Jeder affine Unterraum, der M enthält, enthält $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$. M.a.W.:

$$\overline{M}^{\,\mathsf{aff}} = \bigcap_{\substack{\Delta \text{ aUR} \\ M \subseteq \Delta}} \Delta$$

(d) $M \subseteq M' \subseteq V \ \Rightarrow \ \overline{M}^{\,\mathsf{aff}} \subseteq \overline{M'}^{\,\mathsf{aff}}$

∘

Damit können wir ganz einfach Verbindungsräume erklären:

5.7 Definition

(a) Seien Γ, Δ affine Unterräume von V und $\Gamma \vee \Delta := \overline{\Gamma \cup \Delta}^{\,\mathsf{aff}}$.
$\Gamma \vee \Delta$ heißt *Verbindungsraum von* Γ *und* Δ.

(b) Seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ affine Unterräume von V und sei $\bigvee_{i=1}^{r} \Gamma_i := \overline{\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r}^{\,\mathsf{aff}}$.
$\bigvee_{i=1}^{r} \Gamma_i$ heißt *Verbindungsraum der affinen Unterräume* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$.

(c) Sonderfall von (b): Wenn $\Gamma_i = \{p^{(i)}\}, 1 \leq i \leq r$ dann schreiben wir $p^{(1)} \vee \cdots \vee p^{(r)}$ statt $\{p^{(1)}\} \vee \cdots \vee \{p^{(r)}\}$.

∘

5.8 Regel
Seien $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ affine Unterräume von V.

(a) $\Gamma \vee \Delta = \Delta \vee \Gamma$

(b) $\big(\ldots \big(\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \big) \vee \cdots \vee \Gamma_{r-1} \big) \vee \Gamma_r = \bigvee_{i=1}^{r} \Gamma_i$, ebenso für jede andere Klammerung der Γ_i.
(Assoziativgesetz für $\vee$)

∘

Explizite Darstellung für „$\Gamma \vee \Delta$“ in Parameterform:

5.9 Beobachtung.
Seien Γ, Δ affine Unterräume in V, beide nicht leer mit Richtungen U, W und seien a aus Γ und b aus Δ. Dann gilt

$$\Gamma \vee \Delta = a + \big(U + W + K(b-a)\big) = b + \big(U + W + K(a-b)\big)\ .$$

$\circ$

5.10 Beispiel.

(a) $\overline{\varnothing}^{\,\mathsf{aff}} = \varnothing$ und $\overline{\{p\}}^{\,\mathsf{aff}} = \{p\}$ „=“p.

(b) Für zwei verschiedene Punkte p, q in V ist die Bedeutung von $p \vee q$ nach Definition 5.7 (a) kompatibel mit der Bedeutung aus §1.

(c) Seien $p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}$ aus V, dann ist

$$\begin{aligned} p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} = (p^{(0)} \vee p^{(1)}) \vee p^{(2)} &\underset{\text{Beob. 5.9}}{=} \big(p^{(0)} + K(p^{(1)} - p^{(0)})\big) \vee (p^{(2)} + \{0\}) \\ &\underset{\text{Beob. 5.9}}{=} p^{(0)} + \big(K(p^{(1)} - p^{(0)}) + \{0\} + K(p^{(2)} - p^{(0)})\big) \\ &= p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, p^{(2)} - p^{(0)} \rangle_K\ . \end{aligned}$$

(d) Seien $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus V, $r \geq 1$. Durch Induktion erhält man:

$$p^{(0)} \vee \dots \vee p^{(r)} = p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)} \rangle_K\ .$$

(e) Seien a, b, c, d aus V und gelte $a \neq b$, $c \neq d$.

(i) Seien $\Gamma = a \vee b$, $\Delta = c \vee d$, dann ist

$$\Gamma \vee \Delta = (a \vee b) \vee (c \vee d) = a \vee b \vee c \vee d \underset{\text{Beisp. (d)}}{=} a + \underbrace{\langle b-a, c-a, d-a \rangle_K}_{=:\, U}\ .$$

Die Dimension hängt von der Lage der vier Punkte ab. Liegen sie nicht in einer Ebene, dann ist $\mathsf{dim}_K U = 3$. Vergleichen Sie mit Aufgabe (6) und Satz 5.4.

(ii) Wenn $\Gamma = a + Kv, v \neq 0, \Delta = b + Kw, w \neq 0$, dann ist nach Beobachtung 5.9

$$\Gamma \vee \Delta = a + \langle v, w, b-a \rangle_K\ .$$

$\circ$

Affine Erzeugung

5.11 Definition

(a) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affines Erzeugendensystem von* Γ, wenn $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}} = \Gamma$.

(b) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affine Basis von* Γ, wenn $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}} = \Gamma$ und dies für keine echte Teilmenge von M gilt.

(c) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affin unabhängig*, wenn M eine affine Basis von $\overline{M}^{\,\mathsf{aff}}$ ist und *affin abhängig*, wenn sie nicht affin unabhängig ist.

$\circ$

Bei uns ist in der Regel M eine endliche Menge, $M = \{p^{(0)}, \dots, p^{(r)}\}$. Wir lassen dann Mengenklammern weg und sagen z.B. „$p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ ist eine affine Basis“ statt „$\{p^{(0)}, \dots, p^{(r)}\}$

ist eine affine Basis“. Auf Grund unserer Definitionen kommt es dabei auf die Reihenfolge der $p^{(i)}$ nicht an.

Beachten Sie die durchgehende Analogie zu Begriffen aus der linearen Algebra:

Linearkommbination	$\leftrightarrow$	Affinkombination
lineare Hülle/lineares Erzeugnis/Aufspann	$\leftrightarrow$	affine Hülle
Erzeugendensystem	$\leftrightarrow$	affines Erzeugendensystem
linear unabhängig	$\leftrightarrow$	affin unabhängig
Basis	$\leftrightarrow$	affine Basis

Es fehlen uns noch Informationen zur Basislänge/Dimension und zu Koordinaten.

5.12 Satz

(a) Seien $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus V. Äquivalent sind

(i) $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ sind affin unabhängig/affin abhängig

(ii) $p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)}$ sind linear unabhängig/ linear abhängig

(b) Seien Γ ein affiner Unterraum von V mit Richtung U und $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus Γ. Äquivalent sind

(i) $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ ist ein affines Erzeugendensystem/eine affine Basis von Γ

(ii) $p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)}$ ist ein Erzeugendensystem/eine Basis der Richtung U von Γ.

$\circ$

Beachte: Wenn Γ nicht leer ist, dann ist auf Grund von (b) die *Länge einer affinen Basis von* Γ *stets um eins größer als die Länge einer Basis der Richtung von* Γ, bzw. als die Dimension von Γ.

5.13 Beispiel.

(a) Randfälle: Wenn Γ leer ist, dann sind die Aussagen in Satz 5.12 gegenstandslos. Wenn $\Gamma = \{p\}$, $p \in V$, dann ist p affine Basis von Γ und $\varnothing$ ist Basis der Richtung $\{0\}$ von Γ.

(b) Seien a, b, c drei nicht kollineare Punkte in V (Eckpunkte eines nicht ausgearteten Dreiecks). Dann gilt

$$a \notin b \vee c, \;\; b \notin c \vee a, \;\; c \notin a \vee b$$

und a, b, c ist eine affine Basis von $a \vee b \vee c$. Nach Beispiel 5.10 (c),(d) ist

$$\overline{\{a, b, c\}}^{\,\mathsf{aff}} = a \vee b \vee c = a + \langle b - a, c - a \rangle_K \;\; ,$$

wobei hier $b - a, c - a$ linear unabhängig sind. Drei affin unabhängige Punkte erzeugen affin eine Ebene.

(c) Seien a, b, c, d vier nicht komplanare Punkte in V (Eckpunkte eines nicht ausgearteten Tetraeders).

Keiner der vier Punkte darf demnach im affinen Erzeugnis der übrigen drei liegen. Nach Beispiel 5.10 (e)(i) ist

$$\overline{\{a, b, c, d\}}^{\,\mathsf{aff}} = a \vee b \vee c \vee d = a + \langle b - a, c - a, d - a \rangle_K \;\; .$$

Wir erwarten natürlich, dass die Dimension 3 sein wird. Wären die Vektoren $b-a, c-a, d-a$ linear abhängig, dann würde mit gewissen α, β, γ aus K, nicht alle 0, gelten:

$$\alpha(b - a) + \beta(c - a) + \gamma(d - a) = 0 \; .$$

Wäre dabei z.B. $\alpha \neq 0$, dann würde folgen $b - a = -\frac{\beta}{\alpha}(c - a) - \frac{\gamma}{\alpha}(d - a)$ und dann $b = \big(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\big)\, a + \big(-\frac{\beta}{\alpha}\big)\, c + \big(-\frac{\gamma}{\alpha}\big)\, d$. Letzteres ist eine Affinkombination und somit liegt b in $a \vee c \vee d$ im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Gleiches ergibt sich, falls etwa β

oder γ von 0 verschieden sind. Die Dimension ist also tatsächlich 3. Vier affin unabhängige Punkte erzeugen einen dreidimensionalen affinen Unterraum.

∘

Das Ergebnis in Beispiel 5.13 (c) lässt sich leicht verallgemeinern:

5.14 Beobachtung.
Seien $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ aus V, dann sind $a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots,\ a^{(r)} - a^{(0)}$ genau dann linear abhängig, bzw. $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ genau dann affin abhängig, wenn

$$a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{r} a^{(i)} \quad \text{mit einem } j \text{ aus } \{0, \ldots, r\}.$$

∘

Affine Koordinaten
Grundlage für die Einführung affiner Koordinaten ist die folgende

5.15 Beobachtung.
Seien $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ affin unabhängige Punkte in V und $\lambda_0, \ldots, \lambda_r, \mu_0, \ldots, \mu_r$ aus K derart, dass $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^{r} \mu_i$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)} = \sum_{i=0}^{r} \mu_i a^{(i)} \Rightarrow \lambda_0 = \mu_0, \ldots, \lambda_r = \mu_r$$

∘

Eine Darstellung $p = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)}$ für einen Punkt p mit affin unabhängigen Punkten $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ ist eindeutig und die Koeffizienten $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ heißen *affine oder auch baryzentrische Koordinaten des Punktes* p. Im Falle $r = 2$ werden sie manchmal *Dreieckskoordinaten* und im Falle $r = 3$ *Tetraederkoordinaten* genannt.

Bemerkung zur Schreibweise: In der allgemeineren/abstrakteren affinen Geometrie wird unterschieden zwischen dem zu Grunde liegenden Vektorraum V, in dem die Richtungsvektoren liegen, und einer zugeordneten Menge X, in der die Punkte liegen. Zu zwei Punkten p, q aus X muss dann ein Richtungsvektor zugewiesen werden, für den häufig $\overrightarrow{pq}$ geschrieben wird. Bei uns sind Xund V identisch und dann üblicherweise $\overrightarrow{pq} = q - p$, weswegen sich die Pfeilschreibweise eigentlich erübrigt. Sie ist u.U. dann zweckmäßig, wenn man die Vorstellung einer Verschiebung/Translation erwecken möchte, ohne mit einem Abbildungsbegriff hantieren zu wollen oder, bedingt durch den Kontext, zu können. Insbesondere bei der Einführung von affinen Koordinaten haben wir es bei unserem Vorgehen etwas leichter, da wir Beobachtung 5.14 direkt für Punkte angeben können, für die in der allgemeinen affinen Geometrie ja keine affinen Kombinationen erklärt sind.

5.16 Beispiele

(a) Die affine Hülle $\overline{\{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}}^{\mathsf{aff}}$ der Standardbasisvektoren; Strecke, Dreieck, Tetraeder, Simplex für $n = 2, 3, \ldots.$

(b) Affine Koordinaten des Schwerpunktes affin unabhängiger Punkte, Dreieckskoordinaten, [KK] für mehr Details.

∘

5.17 Definition
Für eine Teilmenge M eines K-Vektorraumes V sei $\mathsf{dim}_K M := \mathsf{dim}_K \overline{M}^{\mathsf{aff}}$. Insbesondere ist dann $\mathsf{dim}_K\{a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}\} = r - 1$ für affin unabhängige Punkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$. ∘

5.18 Beispiel. Punkte auf Kurven.
U.A. die Momentenkurve und ihre Schnitte mit affinen Unterräumen. ∘

5.19 Beobachtung. Dimensionsformel für affine Unterräume.
Seien Γ, Δ affine Unterräume in einem endlichdimensionalen K- Vektorraum mit Richtungen U und W. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{dim}_K(\Gamma \vee \Delta) &= \mathsf{dim}_K\Gamma + \mathsf{dim}_K\Delta - \mathsf{dim}_K(\Gamma \cap \Delta) \quad \text{falls} \quad \Gamma \cap \Delta \neq \varnothing \\ &= \mathsf{dim}_K\Gamma + \mathsf{dim}_K\Delta - \mathsf{dim}_K(U \cap W) + 1 \quad \text{falls} \quad \Gamma \cap \Delta = \varnothing \end{aligned}$$

∘

Literatur zu §5: [A],[F],[L], siehe Internetseite der Vorlesung.