§ 6 Affine Abbildungen

Bei der Definition affiner Abbildungen gehen wir von der linearen Algebra aus und kommen aus guten Gründen erst danach zum „geometrischen“ Pendant und dem so genannten Hauptsatz der affinen Geometrie, den wir allerdings nicht beweisen werden. Es folgen wie immer erste analytische Eigenschaften und dann etliche Beispiele. Schließlich schauen wir uns affine Abbildungen bei Dimension 2 und 3 genauer an.

6.1 Definition

Seien Γ, Γ' affine Unterräume der K-Vektorräume V, V' mit Richtungen U, U' und sei a aus Γ. Eine Abbildung $f:\ \Gamma \to \Gamma'$ heiße *affin*, wenn es eine lineare Abbildung $\ell:\ U \to U'$ gibt derart, dass mit einem a aus Γ für alle p aus Γ gilt

$$f(p) = f(a) + \ell(p-a)\ .$$

∘

Meistens wird $V = V' = K^n$ sein und $K = \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ sein, oft auch $\Gamma = V = \Gamma'$. Die Definition sieht auf den ersten Blick etwas kompliziert aus. Man bedenke aber, dass affine Abbildungen zwischen affinen Unterräumen und nicht nur zwischen Vektorräumen definieren werden sollen.

6.2 Beobachtung

Sei f eine affine Abbildung (Bezeichnungen wie in Definition 6.1).

(a) Definition 6.1. ist unabhängig von der Wahl von a aus Γ, denn es gilt für alle b, p aus Γ

$$f(p) = f(b) + \ell(p-b)\ .$$

(b) Die lineare Abbildung ℓ ist durch f eindeutig bestimmt und heißt *zu f gehörig*.
Schreibweise: ℓ_f.

(c) Für je endlich viele Punkte $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ aus Γ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ aus K **mit $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$** gilt

$$f\Big(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)}\Big) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(a^{(i)})\ . \tag{1}$$

Man sagt dafür auch: *„f ist mit Affinkombinationen verträglich.“*
Wenn f injektiv ist, dann bedeutet dies insbesondere, dass f Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen, etc. abbildet. (Siehe auch weiter unten Satz 6.12).
Beachten Sie auch die Analogie zu linearen Abbildungen!

(d) Für alle b aus Γ ist $f(\Gamma) = f(b) + \ell(U)$.

∘

6.3 Definition

Eine bijektive affine Abbildung heißt *Affinität*. ∘

Bei affinen Unterräumen war, außer wenn $K \cong \mathbb{Z}_2$, die Abgeschlossenheit bezüglich Verbindungsgeraden eine geometrische Charakterisierung (Satz 4.11). Bei affinen Abbildungen ist es die Wirkung auf Geraden, die ebenfalls eine geometrische Charakterisierung erlaubt. Allerdings ist hier der Zusammenhang mit unserer analytischen Definition wesentlich komplizierter. Das wichtige Ergebnis hierzu ist der folgende so genannte *Hauptsatz der affinen Geometrie*.

6.4 Satz

Seien $|K| \geq 3$, $\mathsf{dim}_K V \geq 2$, Γ, Δ affine Unterräume und $f:\ \Gamma \to \Delta$ eine affine Abbildung. Äquivalent sind

(i) f bildet Geraden in Geraden ab (f ist Kollineation).

(ii) f ist bis auf einen Automorphismus[1] von K eine Affinität im Sinne der Definitionen 6.3 und 6.1.

∘

Für die Richtung „$\Leftarrow$" des Beweises können wir auf Beobachtung 6.2 (c) verweisen. Für die andere Richtung wird z.B. auf [F], S.35 oder [A], p. 41 verwiesen.

Nur über Körpern, die nur die Identität als Automorphismus zulassen, sind Kollineationen genau die Affinitäten. Es ist interessant, festzustellen, dass dadurch den rationalen und den reellen Zahlen eine Sonderrolle zukommt:

6.5 Folgerung

Wenn $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$, dann lautet der Hauptsatz so:

$$f \text{ Kollineation} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ Affinität}$$

∘

Zum Beweis muss man nachrechnen, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ keine nicht trivialen Automorphismen besitzen. Dies sind zwei Algebra-Übungsaufgaben.

◇ ◇ ◇

Vor den Beispielen zu affinen Abbildungen noch eine weitere grundlegende Eigenschaft affiner Abbildungen:

6.6 Beobachtung

Sei $f : \Gamma \to \Delta$ eine affine Abbildung und sei $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Γ. Dann ist f durch die Bilder der affinen Basispunkte vollständig festgelegt. Insbesondere ist f die identische Abbildung, wenn f die affinen Basispunkte festlässt. ∘

Beachten Sie auch hier die Analogie zu linearen Abbildungen!

6.7 Beispiele

(a) Lineare Abbildungen sind affin.

(b) Mit jeder linearen Abbildung kann man affine Abbildungen konstruieren.

(c) Translationen

(d) Alle affinen Abbildungen ergeben sich als Hintereinanderausführungen von Translationen und linearen Abbildungen

(e) Hintereinanderausführungen affiner Abbildungen

(f) Einschränkungen affiner Abbildungen auf affine Unterräume des Definitionsraumes

∘

Merke: In Teil (d) der Beispiele ergibt sich u.A. die Darstellung einer affinen Abbildung in der Form

$$f = T_{f(a)} \circ \ell_f \circ T_{-a} \ .$$

6.8 Beispiel: Streckungen.

Als Motivation zunächst: Streckung in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ die den Nullpunkt nicht enthält.

....

[1]Damit ist gemeint: es gibt einen Automorphismus σ von K derart, dass an Stelle von (1) folgendes gilt: $f\big(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)}\big) = \sum_{i=0}^{r} \sigma(\lambda_i) f(a^{(i)})$. Beachte, dass automatisch $\sum_{i=0}^{r} \sigma(\lambda_i) = 1$.

Für die allgemeine Definition seien mit den bisherigen Bezeichnungen $\Gamma = \Gamma', \alpha$ aus K, b aus Γ und $\ell = \alpha \cdot \mathsf{id}_U$. Dann heißt die affine Abbildung

$$f: \Gamma \to \Gamma \quad \text{mit} \quad f(p) = \underbrace{b}_{=f(a)} + \underbrace{\ell(p-a)}_{=\alpha(p-a)} \quad \text{für} \quad a, p \quad \text{in } \Gamma$$

Streckung oder auch *Dilatation*. Sie heißt *echt*, wenn $\alpha \neq 0$.
Eigenschaften:
Wenn $\alpha \neq 0$, dann ist f eine Affinität.
Wenn $\alpha \neq 0, 1$, dann hat f genau einen Fixpunkt.
Wie dieser Fixpunkt bestimmt werden kann, lernen Sie in der Aufgabe (14) (b).

Sei nun $\alpha \neq 0, 1$ und p^* der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f, dann ist es zweckmäßig die Abbildungsvorschrift von f auf diesen Fixpunkt zu beziehen. Nach Beobachtung 6.2 (a) ist dann nämlich

$$f(p) = f(p^*) + \ell(p - p^*) = p^* + \alpha(p - p^*) = (1 - \alpha)p^* + \alpha p \quad \text{für alle } p \text{ aus } \Gamma \ .$$

Für weitere Eigenschaften von Streckungen wird auf die Aufgabe (14) verwiesen. ∘

6.9 Beispiel: Parallelprojektionen.
In der Vorlesung: Beispiele von Parallelprojektionen in $\mathbb{R}^3$.

Für die allgemeine Definition seien mit den bisherigen Bezeichnungen $V = V' = U_1 \oplus U_2$ und dann $\ell : V \to V$ die lineare Abbildung mit der Vorschrift $\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)}$ für $u^{(1)}$ aus U_1, $u^{(2)}$ aus U_2. ℓ ist die (lineare) Projektion von V auf U_1 entlang U_2. Sei nun Γ ein affiner Unterraum von V und $\Gamma' = a + U_1$ mit (o.E.!) $\underline{a \text{ aus } U_2}$.
Dann ist $f: \Gamma \to \Gamma'$ mit $f(p) = a + \ell(p)$ für p aus Γ die (affine) *(Parallel-)Projektion von* Γ *nach* Γ' *entlang* U_2. Offensichtlich ist $f = T_a \circ \ell_{|\Gamma}$.
∘

6.10 Beispiel: Spiegelungen.
In der Vorlesung: Beispiel einer (Schräg-)Spiegelung in einer Ebene in $\mathbb{R}^3$, die den Nullpunkt nicht enthält. Es folgt die allgemeine Definition.

(a) Spiegelung in Richtung eines Untervektorraumes.
Für die allgemeine Definition seien $\Gamma = \Gamma' = a + U$, $U = U_1 \oplus U_2$ und $\ell : V \to V'$ mit der Vorschrift $\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)} \boldsymbol{-u^{(2)}}$ für $u^{(1)}$ aus U_1, $u^{(2)}$ aus U_2.
Die *Spiegelung* f *in* Γ *an* $a + U_1$ *in Richtung* U_2 ist dann erklärt durch die Vorschrift $f(p) = a + \ell(p - a)$ für p aus Γ.

(b) Gleitspiegelung.
Sei f eine Spiegelung gemäß (a). Sei zusätzlich noch w aus U gegeben, dann heißt die Abbildung g mit $g = T_w \circ f$ *Gleitspiegelung (in* Γ*)*.
∘

6.11 Beispiel
Ein Beispiel zur Veränderung des Abbildungstyps bei Einschränkung auf einen Unterraum ist Gegenstand der Aufgabe (12). ∘

Zur **Konstruktion affiner Abbildungen** stehen uns inzwischen folgende Methoden zur Verfügung:

- Vorgabe einer linearen Abbildung ℓ und von Verschiebungen T_{-a}, T_b um dann f festzusetzen als $f = T_b \circ \ell \circ T_{-a}$. Die Abbildungsvorschrift lautet dann: $f(x) = b + \ell(x - a)$ für x aus einem geeigneten Definitionsbereich. $x - a$ muss dabei im Definitionsbereich von ℓ liegen.

- Geometrisch motivierte Abbildungsvorschrift und Nachweis der Eigenschaft „affin“. Ein Beispiel wird in Aufgabe (13) behandelt.
- Vorgabe von Bildpunkten für die Punkte einer affinen Basis des Definitionsraumes.

Zu Letzterem eine Umkehrung von Beobachtung 6.6:

6.12 Satz

Bezeichnungen wie in Definition 6.1.
Sei $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Γ und seien $b^{(0)}, \ldots, b^{(r)}$ aus Γ'. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f:\ \Gamma \to \Gamma'$ derart, dass $f(a^{(i)}) = b^{(i)}$ für $0 \leq i \leq r$, und diese ist genau dann

surjektiv, wenn $\Gamma' = b^{(0)} \vee \cdots \vee b^{(r)}$.
injektiv, wenn $b^{(0)}, \ldots, b^{(r)}$ affin unabhängig sind.
bijektiv, wenn $b^{(0)}, \ldots, b^{(r)}$ eine affine Basis von Γ' ist.

∘

Fortsetzung affiner Abbildungen auf den umgebenden Vektorraum.
In der Darstellung $f = T_{f(a)} \circ \ell_f \circ T_{-a}$ sind die Translationen von alleine auf dem ganzen Raum definiert und auf einem Untervektorraum erklärte lineare Abbildungen lassen sich stets fortsetzen, wenn auch i.A. auf viele Arten.

Affine Abbildungen und Matrizen.

6.13 Beobachtung

Mit den Bezeichnungen von Definition 6.1 seien $V = K^n = \Gamma, V' = K^m = \Gamma'$ und $f:\ V \to V'$ eine Abbildung.
Dann ist f genau dann affin, wenn es eine Matrix A in $K^{m\times n}$ und einen Vektor b in K^m gibt derart, dass $f(x) = Ax + b$ für alle x aus K^n. ∘

Alles, was Sie über Matrixdarstellungen linearer Abbildungen in der linearen Algebra gelernt haben, hat eine analytisch-geometrische Bedeutung für affine Abbildungen und kann entsprechend genutzt werden: Basiswechsel, Eigenwerte, Normalformen, etc.

Vergleich affiner Abbildungen und Fixräume.

6.14 Beobachtung

Seien $f, g:\ \Gamma \to \Gamma'$ affine Abbildungen und sei $M_{f=g} = \{p \in \Gamma:\ f(p) = g(p)\}$. Dann ist $M_{f=g}$ ein affiner Unterraum. ∘

6.15 Beispiele

Sei $f:\ \Gamma \to \Gamma'$ eine affine Abbildung.

(a) Für alle y aus V' ist $f^{-1}(y)$ ein affiner Unterraum und für alle $y^{(1)}, y^{(2)}$ aus $f(\Gamma)$ haben $f^{-1}(y^{(1)})$ und $f^{-1}(y^{(2)})$ die gleiche Richtung.

(b) Sei $\Gamma = \Gamma' = V$. Sei $\mathsf{Fix}_f = \{p \in V:\ f(p) = p\}$. Fix_f ist ein affiner Unterraum.
Ist p^* ein Fixpunkt von f, dann ist (vgl. Beispiel 6.8)

$$f(p) = p^* + \ell_f(p - p^*) \quad \text{für } p \text{ aus } \Gamma.$$

Wann gibt es es Fixpunkte?
Im Falle $\Gamma = V = \Gamma'$ genau dann, wenn die Gleichung

$$0 = f(x) - x = f(a) + \ell_f(x-a) - x = (\ell_f - id_v)(x) - (\ell_f(a) - f(a))$$

mindestens eine Lösung p^* für x besitzt.

Dies ist z.B. der Fall, wenn f selbst schon linear ist mit $p^* = 0$.

Außerdem, wenn 1 kein Eigenwert von ℓ_f ist. Dann ist nämlich $(\ell_f - id_v)$ invertierbar und dann hat die Gleichung sogar eine eindeutige Lösung, f also genau einen Fixpunkt, bzw. Fix_f ist in diesem Fall ein Punkt.

(c) Fixpunkte von Parallelprojektionen

(d) Fixpunkte von Spiegelungen und Gleitspiegelungen

∘

Zur Klassifikation affiner Abbildungen insbesondere in $\mathbb{R}^2$:

Es wird gezeigt, wie es geht. Aber nicht alle Details werden ausgeführt.
Die Einteilung oder Klassifikation affiner Abbildungen in Typen beruht auf folgendem Äquivalenzbegriff. Die affinen Abbildungen werden dadurch in Klassen eingeteilt, innerhalb derer dann nach schönen, einfach und transparent gebauten Vertretern gesucht wird. Alle weiteren affinen Abbildungen in derselben Klasse erben dann solche geometrische Eigenschaften von dem Vertreter, die unter Affinitäten erhalten bleiben.

6.16 Definition

Zwei affine Abbildungen $f : \Gamma \to \Gamma, g : \Delta \to \Delta$ heißen *(affin) äquivalent, ähnlich oder konjugiert*, wenn $g = h \circ f \circ h^{-1}$ mit einer Affinität $h : \Gamma \to \Delta$. ∘

Da lineare Abbildungen affin sind ist, neben der Angabe erster Eigenschaften, zunächst zu klären, ob diese Definition mit derjenigen aus der linearen Algebra kompatibel ist.

6.17 Beobachtung

(a) Seien in Definition 6.16 speziell $\Gamma = U, \Delta = W$ mit Untervektorräumen U, W und f, g linear. Dann sind f, g genau dann ähnlich (konjugiert), wenn sie als lineare Abbildungen ähnlich sind.

(b) Affine Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Seien $V = \Gamma, V' = \Gamma'$. Die linearen Abbildungen ähnlicher (konjugierter) affiner Abbildungen sind konjugiert.

∘

Wann ist eine affine Abbildung konjugiert zu einer linearen Abbildung?

6.18 Beobachtung

Sei $f : \Gamma \to \Gamma$ affin.
Dann ist f genau dann konjugiert zu einer linearen Abbildung, wenn f einen Fixpunkt hat. ∘

Was passiert mit Punktmengen unter Affinitäten?

6.19 Definition

Teilmengen M, N von affinen Unterräumen Γ, Δ heißen *affin äquivalent oder (verallgemeinert) ähnlich*, wenn $h(M) = N$ mit einer Affinität $h : \Gamma \to \Delta$. ∘

6.20 Beispiele

(a) Affin unabhängige Punktmengen mit gleich vielen Punkten sind affin äquivalent, insbesondere zwei nicht ausgeartete Dreiecke, Tetraeder, etc.

(b) Zwei affine Unterräume sind genau dann affin äquivalent, wenn sie die gleiche Dimension haben.

(c) Die Fixräume konjugierter affiner Abbildungen sind affin äquivalent.

∘

Konjugation, affine Basiswechsel und Matrixdarstellung affiner Abbildungen.
Sei $h: \ K^n \to K^n$ eine Affinität und $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ die affine Standardbasis (mit $e^{(0)} = 0$). $h(e^{(0)}), h(e^{(1)}), \ldots, h(e^{(n)})$ ist dann eine neue affine Basis von K^n. Man kann demnach Affinitäten auch einfach als affine Basiswechsel auffassen. Ist nun $f: \ K^n \to K^n$ eine affine Abbildung und g die mit h konjugierte Abbildung, also $g = h \circ f \circ h^{-1}$, dann ergibt sich ähnlich wie in der linearen Algebra folgender Zusammenhang:

$$\begin{tikzcd}
e^{(i)} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(e^{(i)}) \arrow[ddd, mapsto] \\
& K^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & K^n \arrow[d, "h"'] & \\
& K^n \arrow[r, "g"'] & K^n & \\
h(e^{(i)}) \arrow[rrr, mapsto] & & & h(f(e^{(i)}))
\end{tikzcd}$$

Für die Matrizendarstellungen von f, g, h ergibt sich in diesem Kontext

6.21 Beobachtung
Seien $f(x) = a + Ax$ und $h(x) = c + Px$ für alle x aus K^n. Dabei sind a, c aus K^n,A, P aus $K^{n \times n}$ und P invertierbar. Für die Abbildung g mit $g = h \circ f \circ h^{-1}$ ergibt sich dann die Matrixdarstellung

$$\boxed{g(y) = \underbrace{(c + Pa - PAP^{-1}c)}_{=:\, \boldsymbol{b}} + \underbrace{PAP^{-1}}_{=:\, \boldsymbol{B}} y \quad \text{für} \quad y \in K^n.}$$

In kompakter Form bedeutet dies $g = T_b \circ \ell_B$ mit den angegebenen b, B. $\circ$

Für die Auswahl je eines Vertreters aus den Konjugationsklassen (Klassifikation) ist nun der Weg vorgezeichnet: Wähle zuerst P und dann c, derart dass B und b und damit g besonders schön oder einfach gebaut sind.
Ist erst einmal eine Wahl für P getroffen, dann ergibt sich die Wahl von c in vielen Fällen von selbst und ist auch ansonsten kein großes Problem mehr. Die Wahl von P beruht vollständig auf Ergebnissen aus der linearen Algebra u.A. zu Eigenwerten, Eigenvektoren, Eigenräumen, Invarianz. Sie werden bei dieser Gelegenheit soweit nötig wiederholt.
Die Ergebnisse für $\mathbb{R}^2$ sind in den folgenden beiden Sätzen zusammengefasst. Sie ergeben die so genannte Klassifizierung affiner Abbildungen in $\mathbb{R}^2$. Satz 6.22 behandelt den Fall linearer Abbildungen und Satz 6.23 den Fall affiner Abbildungen.

6.22 Satz: Eine „Ähnlichkeitsnormalform“ für lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^2$.
Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann ist A ähnlich

(i) entweder zu $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \leq \mu$,

(ii) oder zu $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) oder zu $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

Dabei tritt genau dann der Fall

- (i) ein, wenn A zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat,
- (ii) ein, wenn A nur einen Eigenwert und nicht zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat,
- (iii) ein, wenn A die beiden komplexen Eigenwerte $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ hat mit $\beta \neq 0$.

$\circ$

Die zu A gehörende lineare Abbildung ℓ_A heißt im Fall

•(i)

−*Euler-Affinität*, wenn $\lambda < \mu$, $\lambda \neq 1 \neq \mu$ und $\lambda\mu \neq 0$,

−*(zentrische) Streckung*, wenn $\lambda = \mu \neq 1$ (echt wenn $\lambda \neq 0$),

−*Parallelstreckung*, wenn $\lambda = 1, \mu > 1$ oder $\lambda < 1, \mu = 1$,

•(ii)

−*Streckscherung*, wenn $\lambda \neq 1$ (echt wenn $\lambda \neq 0$),

−*Scherung*, wenn $\lambda = 1$,

•(iii) *Drehstreckung* mit Streckungsfaktor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und $\cos(\text{Drehwinkel}) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

6.23 Satz: Eine Normalform bezüglich Konjugation für affine Abbildungen in $\mathbb{R}^2$.

Zu $a \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $f_{a,A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung mit $f_{a,A}(x) = a + Ax$ für x aus $\mathbb{R}^2$.

(a) Wenn $\mathsf{Fix}_{f_{a,A}} = \varnothing$, dann ist $f_{a,A}$ konjugiert

(i) <u>entweder</u> zu $T_{e^{(1)}}$ (Translation),

(ii) <u>oder</u> zu $f_{e^{(1)},\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right]}$ mit $\lambda \neq 1$ (nicht-triviale Parallelstreckung mit Verschiebung),

(iii) <u>oder</u> zu $f_{e^{(2)},\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]}$ (Scherung mit Verschiebung, oder Schubscherung).

(b) Wenn $\mathsf{Fix}_{f_{a,A}} \neq \varnothing$, dann ist $f_{a,A}$ konjugiert zu einer linearen Abbildung und damit „erbt“ $f_{a,A}$ deren Eigenschaften gemäß Satz 6.22 und auch deren Namen.

Genau dann tritt der Fall

•(a)(i) ein, wenn $f_{a,A}$ bereits eine Translation ist.

•(a)(ii) ein, wenn $\ell_{f_{a,A}}$ den Eigenwert 1 und zusätzlich noch einen von 1 verschiedenen Eigenwert und <u>keinen</u> Fixpunkt hat.

•(a)(iii) ein, wenn $\ell_{f_{a,A}}$ nur 1 als Eigenwert hat, und <u>keinen</u> Fixpunkt.

∘

Die verschiedenen in 6.8, 6.9, 6.10, 6.22 und 6.23 vorkommenden Abbildungsarten nennen wir auch *affine Abbildungstypen.*

Wo tauchen bei all dem unsere zuvor eingeführten Streckungen, Projektionen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen auf?

•Bei Satz 6.22 liegt in (i) eine

– echte Streckung vor, wenn $\lambda = \mu \neq 0$,

– eine Projektion vor entlang $\langle e^{(1)}\rangle_{\mathbb{R}}$ auf $\langle e^{(2)}\rangle_{\mathbb{R}}$, wenn $\lambda = 0, \mu = 1$ und die Nullabbildung, wenn $\lambda = \mu = 0$,

– eine Spiegelung vor in Richtung $\langle e^{(1)}\rangle_{\mathbb{R}}$ an $\langle e^{(2)}\rangle_{\mathbb{R}}$, wenn $\lambda = -1, \mu = 1$.

Gleitspiegelungen mit Fixpunkt sind Spiegelungen ($w \in U_2$ in 6.10).

•Bei Satz 6.23(a) kommen Streckungen, Projektionen und Spiegelungen nicht vor , denn sie besitzen ja alle Fixpunkte. Gleitspiegelungen ohne Fixpunkte ($w \notin U_2$ in 6.10) sind erfasst in 6.23(a)(ii) mit $\lambda = -1$.

Wie entscheide ich bei einer affinen Abbildung zu welchem Abbildungstyp sie gehört?

6.24 Beispiele

Gegeben sei zunächst eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = a + Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und durch } f \text{ bestimmten } a \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} .$$

Ob Satz 6.23 Teil (b) und damit auch Satz 6.22 oder ob Satz 6.23 Teil (a) zur Anwendung kommen kann hängt davon ab, ob es Fixpunkte gibt oder nicht. Daher ist es nahe liegend zunächst nach Fixpunkten zu suchen. In einem zweiten Schritt muss die zu f gehörende lineare Abbildung eingeordnet werden können nach 6.22. Dazu müssen Eigenwerte und u.U. auch Eigenvektoren bestimmt werden. Es folgen mehrere Beispiele.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: f hat genau einen Fixpunkt, da die die Matrix $A - E$ invertierbar ist und deswegen Gleichung $0 = f(x) - x = a + (A - E)x$ genau eine Lösung hat nämlich $\begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/2 \end{bmatrix}$. Sei dieser Fixpunkt mit p^* bezeichnet und sei $\widetilde{f} = T_{-p^*} \circ f \circ T_{p^*}$. $\widetilde{f}$ ist linear, denn für alle x aus $\mathbb{R}^2$ gilt zunächst ganz allgemein nach vgl. 6.2(a)

$$\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0) = \boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}}(x - 0) = \boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 .$$

Im vorliegenden Fall ist $\widetilde{f}(0) = 0$ und man erhält[2]

$$\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(x) = -p^* + a + A(x + p^*) = -p^* + \underbrace{(a + Ap^*)}_{=f(p^*)=p^*} + Ax = Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^2$$

und somit $\widetilde{f} = \boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}} = \boldsymbol{\ell}_A$.
Um nun den Abbildungstyp nach Satz 6.22 bestimmen zu können berechnen wir die Eigenwerte von A. Man erhält die Eigenwerte 4 und -1 als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $t^2 - 3t - 4$ von A.

Nach Satz 6.22 ist damit f bzw. $\widetilde{f}$ eine Euler-Affinität.
Um auch konkret eine Konjugation zu sehen, die f in $\widetilde{f}$ überführt, kann man Eigenvektoren berechnen zu den beiden verschiedenen Eigenwerten.
Man erhält $\mathsf{Eig}_4(A) = \langle v^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\mathsf{Eig}_{-1}(A) = \langle v^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Setzen wir $Q^{-1} = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{bmatrix}$, dann ist $QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Die Diagonaleinträge sind noch nicht der Größe nach aufsteigend geordnet. Setzen wir $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q$, dann ist allerdings $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Stattdessen hätten wir auch von Anfang an die Spalten in Q^{-1} vertauschen können. Zusammenfassung unserer Ergebnisse für f: Sei $h = \boldsymbol{\ell}_P \circ T_{-p^*}$, dann ist

$$h \circ f \circ h^{-1} = \boldsymbol{\ell}_{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} .$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(b), 6.22(iii),

(iii) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(a)(ii),

(iv) $A = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(a)(iii).

....

[2] In der Vorlesung hatte ich u.A. $\widetilde{f}$ bezogen auf den Punkt p^* dargestellt, was natürlich auch möglich ist, aber nicht sehr geschickt, da ja p^* Fixpunkt von f und nicht von $\widetilde{f}$ ist. Das korrekte Ergebnis in diesem Fall ist:

$$\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(p^*) = \boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}}(x - p^*) = \big(\underbrace{-p^* + a + A(x + p^*)}_{=\widetilde{f}(x)}\big) - \big(\underbrace{-p^* + a + A(p^* + p^*)}_{=\widetilde{f}(p^*)}\big) = A(x - p^*)$$

So oder so ergibt sich natürlich stets $\boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}} = \boldsymbol{\ell}_A$, denn $\boldsymbol{\ell}_{\widetilde{f}}$ ist durch $\widetilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Eine Information über die Gesamtheit der Affinitäten in $\mathbb{R}^2$:

6.25 Satz

Eine Affinität in $\mathbb{R}^2$ kann durch drei (oder weniger) (Schräg-) Spiegelungen h_0, h_1, h_2 in die Form

$$h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ f = \ell_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}} \ , \ \alpha \neq 0,$$

mit gebracht werden. (Setze $h_2 = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^n}$ etc. bei Bedarf.)

Der Beweis wird konstruktiv durch Angabe der notwendigen Spiegelungen geführt und kann in Aufgabe (19) in einem Beispiel nachvollzogen werden.

Kann man auch $\alpha = 1$ erreichen ?

6.26 Bemerkungen zu affinen Abbildungen in $\mathbb{R}^3$.

6.27 Beispiel

Eine Anwendung in den Bereichen Computergrafik und CAD: Szenengraphen.

6.28 Beispiel

3D-Betrachtungen eines 4D-Würfels oder allgemeiner: Würfelprojektionen in $\mathbb{R}^n$.