§ 7 Bewegungen

Wir betrachten jetzt Affinitäten in $\mathbb{R}^n$ unter Einbeziehung der Abstandsmessung.

Die Abstandsmessung in R^n beruht auf einem Skalarprodukt. Deswegen muss an die dazu gehörenden Grundbegriffe aus der linearen Algebra erinnert werden:
Sei $(\!(\cdot , \cdot)\!) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, also eine reellwertige, symmetrische und positiv definite Bilinearform. Dann wird mit $d(x, y)$ der Abstand zwischen den Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ und mit $\| x \|$ die Länge des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet und es ist:

$$\| x \| := {}_+\sqrt{(\!(x\,,x)\!)} \ \text{ und } \ d(x,y) := \| x - y \| = \| y - x \| \ .$$

Außerdem wird der Cosinus des zwischen zwei Halbstrahlen $(\mathbb{R}_{\geq})\cdot x$ und $(\mathbb{R}_{\geq})\cdot y$ eingeschlossenen Winkels eingeführt als

$$\cos\measuredangle(x,y) := \frac{(\!(x\,,y)\!)}{\| x \| \cdot \| y \|} \ .$$

Er ist unabhängig von der Auswahl der von 0 verschiedenen Vektoren in $(\mathbb{R}_{\geq})\cdot x$ und $(\mathbb{R}_{\geq})\cdot y$. Diese Definition ist sinnvoll, denn es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Cauchy-Schwarz-sche Ungleichung, z.B. in der folgenden Form:

$$-\| x \| \cdot \| y \| \leq (\!(x\,,y)\!) \leq \| x \| \cdot \| y \| \ .$$

Beispiele zur Wiederholung: Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ und das durch die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ erklärte Skalarprodukt mit $(\!(x\,,y)\!) = {}^{\mathsf{t}}xA\,y$ für x, y aus $\mathbb{R}^n$. (Nachweis!)

Im Folgenden ist $(\!(\cdot , \cdot)\!)$ fest gewählt und fast immer das Standardskalarprodukt.

7.1 Definition.
Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Bewegung, Isometrie oder abstandstreu*, wenn

$$\| f(y) - f(x) \| = \| y - x \|$$

für alle x, y aus $\mathbb{R}^n$. ∘

7.2 Definition.
Eine Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *metrisch* oder *mit dem Skalarprodukt verträglich*, wenn

$$(\!(\ell(x)\,,\ell(y))\!) = (\!(x\,,y)\!)$$

für alle x, y aus $\mathbb{R}^n$. ∘

7.3 Satz.
(a) Metrische Abbildungen sind linear.
(b) Für eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f \text{ Bewegung} \quad \Leftrightarrow \quad \ell_f \text{ metrisch}$$

(c) Bewegungen sind Affinitäten.

∘

Im Beweis dieses Satzes ergibt sich auch gleich noch Folgendes:

7.4 Beobachtung. Längentreue lineare Abbildungen sind metrisch.

Dabei heißt eine Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *längentreu*, wenn $\| \ell(x) \| = \| x \|$ für alle x aus $\mathbb{R}^n$. ∘

Nicht verwunderlich auf Grund der starken Anforderungen in den Definitionen 7.2 und 7.1 ist

7.5 Beobachtung. Bewegungen sind *winkeltreu* in folgendem Sinne:

Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung ist, dann gilt für alle a, x, y aus $\mathbb{R}^n$ mit $x \neq a \neq y$:

$$\cos\measuredangle\big(f(x) - f(a), f(y) - f(a)\big) = \cos\measuredangle(x - a, y - a)\ .$$

∘

7.6 Beispiele und Gegenbeispiele.

(a) Translationen

(b) Schräg-Spiegelungen sind im Allgemeinen keine Bewegungen, orthogonale Spiegelungen schon. Eine Spiegelung ist orthogonal, wenn in 6.10(a) zusätzlich gilt: $U_1 \perp U_2$. Mehr dazu weiter unten.
Beispiel: $f = \ell_A$ mit $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. f ist eine Spiegelung aber keine Bewegung. f ist konjugiert zu einer Bewegung, allerdings ist dann der Basiswechsel nicht durch eine Bewegung bewerkstelligt.

(c) Drehungen: mehr dazu weiter unten.

∘

7.7 Beobachtung. Seien f, g Bewegungen in $\mathbb{R}^n$.

(a) $f \circ g$ ist eine Bewegung.

(b) f^{-1} ist eine Bewegung.

∘

Wie erkennt man eine Bewegung an ihrer Matrixdarstellung ?

7.8 Beobachtung. Matrixdarstellung einer Bewegung in $\mathbb{R}^n$.
Seien $f, \ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen und $(\!(\, , \,)\!)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) ℓ metrisch $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\big[\ell = \ell_A$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ${}^{\mathrm{t}}AA = A{}^{\mathrm{t}}A = E_n.\big]$

(b) f Bewegung $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\big[\, f = T_{f(0)} \circ \ell_A$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ${}^{\mathrm{t}}AA = A{}^{\mathrm{t}}A = E_n.\big]$

∘

Spätestens an dieser Stelle muss an weitere
Begriffe und Schreibweisen aus der linearen Algebra zum Thema „orthogonal“ erinnert werden:
x, y aus $\mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $(\!(x\, , y)\!) = 0$. Schreibweise: $x \perp y$.
Für eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ ist $M^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n :\ (\!(x\, , v)\!) = 0$ für alle $v \in M\}$.
Für zwei Teilmengen M, N von R^n bedeutet $M \perp N$, dass $(\!(u\, , w)\!) = 0$ für alle u aus M und alle w aus N. Eine Basis $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ von $\mathbb{R}^n$ heißt orthogonal, wenn $(\!(v^{(i)}\, , v^{(j)})\!) = 0$ für $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq n$. Sie heißt orthonormiert, wenn zusätzlich $\| \, v^{(i)} \, \| = 1$ für $1 \leq i \leq n$.
Berechnung einer orthogonalen Basis aus einer Basis: „Gram-Schmidt-Verfahren“ und der Zusammenhang mit dem Berechnen von Projektionen.
Orthogonale oder besser: orthonormierte Matrizen und lineare Abbildungen.

7.9 Beispiel. Orthogonale Spiegelungen an einer Hyperebene.
Seien $\Gamma = a + U$ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ ($a \in \mathbb{R}^n, U$ Untervektorraum von $\mathbb{R}^n, \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, U = n - 1$) und $W := U^\perp$. Insbesondere ist $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, W = 1$ und $a + U + W = \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $f_\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f_\Gamma(a + u + w) = a + u - w \qquad \text{für } u \in U, w \in W$$

ist die *(orthogonale) Spiegelung an der Hyperebene* Γ. f_Γ ist eine Bewegung, denn für alle u, u', w, w' aus U bzw. W gilt einerseits

$$\| \, f_\Gamma(a + u + w) - f_\Gamma(a + u' + w') \, \| = \| \, (a + u - w) - (a + u' - w') \, \| = \| \, (u - u') - (w - w') \, \| =: r$$

und andererseits

$$\| (a+u+w)-(a+u'+w') \| = \| (u-u')+(w-w') \| =: t\ .$$

Dabei ist $r=t$, denn $(u-u')\perp(w-w')$ und für orthogonale Vektoren v,v' gilt stets

$$\| v-v' \|^2 = \| v \|^2 - 2(\!(v\,,v')\!) + \| v' \|^2 = \| v \|^2 + 2(\!(v\,,v')\!) + \| v' \|^2 = \| v+v' \|^2\ ,$$

da ja $(\!(v\,,v')\!)$ den Wert 0 ergibt.

Wenn etwa $\langle u^* \rangle_{\mathbb{R}} = W = U^\perp$, dann erhält man nach einer kurzen Rechnung (Einsetzen von $a+u+\lambda u^*$ für x und Ausnutzen der Beziehung $(\!(u^*\,,x-a)\!) = (\!(u^*\,,u+\lambda u^*)\!) = \lambda (\!(u^*\,,u^*)\!) = \lambda \| u^* \|^2$) für alle x aus $\mathbb{R}^n$:

$$f_\Gamma(x) = x + \frac{2}{\| u^* \|^2} (\!(u^*\,,a-x)\!) \cdot u^* \tag{1}$$

(1) ist *eine Normalenform der orthogonalen Spiegelung an* Γ.

Die Matrixdarstellung von f_Γ (bezüglich der Standardbasis) erhalten wir ausgehend von der orthogonalen Elementarspiegelung $\mathscr{s}_n$ an der Hyperebene $\langle e^{(1)},\ldots,e^{(n-1)} \rangle_{\mathbb{R}}$. Sie hat die Matrixdarstellung $\mathscr{s}_n = \ell_{S_n}$ mit $S_n = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sei $(u^{(i)})_{1\le i\le n-1}$ eine orthonormierte Basis der Richtung U von Γ, $u^{(n)} = \dfrac{1}{\| u^* \|} u^*$ und $A = [u^{(1)},\ldots,u^{(n)}]$, dann gilt $A^{-1} = {}^{\mathsf{t}}A$ und

$$B = AS_n{}^{\mathsf{t}}A = E - 2u^{(n)} \cdot {}^{\mathsf{t}}u^{(n)} = E - \frac{2}{\| u^* \|^2} u^* \cdot {}^{\mathsf{t}}u^*\ . \tag{2}$$

Damit erhalten wir für f_Γ:

$$f_\Gamma = T_{f_\Gamma(0)} \circ \ell_B = T_a \circ \ell_B \circ T_{-a} \quad \text{oder} \quad f_\Gamma(x) = a + B(x-a) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

(2) gibt die Matrix von ℓ_{f_Γ} an bezüglich der Standardbasis und (3) ist die dazu gehörende *Matrixdarstellung von* f_Γ.

Die Matrizen in (2) heißen in der numerischen Mathematik *Householder-Matrizen* und an anderen Stellen auch *Matrizen von Cartan-Spiegelungen.*

Beachte: Auch f_Γ^{-1} ist eine Spiegelung und/denn es gilt $f_\Gamma^{-1} = f_\Gamma$. ∘

7.10 Beispiel. Bewegungen in $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten wieder zuerst den Fall linearer Bewegungen ℓ_A mit einer orthonormierten Matrix A aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Für A gilt:

${}^{\mathsf{t}}AA = E_2 \quad\Leftrightarrow\quad A{}^{\mathsf{t}}A = E_2 \quad\Leftrightarrow$

$$\text{entweder} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ \text{mit } a^2+b^2=1, \det A = 1, \\ \text{mit Eigenwerten } a+ib, a-ib \end{array} \right\}}_{\substack{\text{Drehung um den 0-Punkt} \\ \text{gegen die Uhr mit Drehwinkel } \varphi \\ \text{mit } a = \cos\measuredangle(e^{(1)}, Ae^{(1)})}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \\ \text{mit } a^2+b^2=1, \\ \det A = -1, \\ \text{mit Eigenwerten } 1,-1 \end{array} \right\}}_{\substack{\text{orthogonale Spiegelung} \\ \text{an } \mathbb{R}\begin{bmatrix} b \\ 1-a \end{bmatrix}}}$$

Die Auswahl an **Bewegungen in $\mathbb{R}^2$** ist deswegen lange nicht so groß wie bei Affinitäten:

Sei f eine von der Identität verschiedene Bewegung in $\mathbb{R}^2$.
Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- ⋆ f ist eine Translation (ohne Fixpunkte, $\mathsf{det}\,\ell_f = 1$)
- ⋆ f ist eine Drehung um einen Punkt (mit genau einem Fixpunkt, $\mathsf{det}\,\ell_f = 1$)
- ⋆ f ist eine Spiegelung an einer Geraden (,diese enthält alle Fixpunkte von f, $\mathsf{det}\,\ell_f = -1$)
- ⋆ f ist eine Gleitspiegelung (ohne Fixpunkte, $\mathsf{det}\,\ell_f = -1$)

Begründungen: Sei f eine Bewegung in $\mathbb{R}^2$, dann gilt zunächst $f(q) = f(0) + \ell_f(q)$ für alle q aus $\mathbb{R}^2$. Nach Obigem ist entweder $\ell_f = \ell_D$ oder $\ell_f = \ell_S$ mit $D = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ und $a^2 + b^2 = 1$.

Wenn $f \neq \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^2}$ und $\ell_f = \ell_D$, dann hat ℓ_f bzw. D keine reellen Eigenwerte und insbesondere nicht den Eigenwert 1 und somit nach 6.15.(b) genau einen Fixpunkt p^*.
Mit diesem ist $f(q) = p^* + D(q - p^*)$ für alle q aus $\mathbb{R}^2$. f ist eine Drehung um den Fixpunkt p^*. Der Drehwinkel ist durch D bestimmt.

Wenn $\ell_f = \ell_S$, dann gilt insbesondere $f \neq \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^2}$, denn,
wenn $f(0) = 0$, dann ist $f = \ell_f = \ell_S \neq \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Insbesondere ist in diesem Fall f eine Spiegelung.
Wenn $f(0) \neq 0$, dann ist $f(f(0)) = f(0) + \underbrace{\ell_f(f(0))}_{\neq 0, \text{ da } f(0) \neq 0} \neq f(0)$, also gilt $f \neq \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
Wenn in diesem Fall nun zusätzlich $f(0)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist (Fixpunkt), dann ist f eine orthogonale Spiegelung an der Menge der Fixpunkte $\mathsf{Lös}\,(S - E_2, -f(0))$ und wenn nicht, dann ist f eine Gleitspiegelung. ∘

Was ist eine Drehung, wenn die Dimension größer ist als 3 ?
$n = 2$: Drehung um einen Punkt, $n = 3$: Drehung um eine Gerade, $n \geq 4$: Drehung um eine Unterraum der Dimension $n - 2$, was immer dies anschaulich bedeuten mag.

7.11 Definition. Elementare orthogonale Matrizen, elementare Drehungen und Spiegelungen.
Für $n \geq 2$ und für i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ heißt

$$D(i,k;a,b) := \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & -b & \cdots & a & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

elementare Dreh(ungs)matrix. Dabei ist b in der i-ten Zeile und k-ten Spalte und $-b$ in der k-Zeile und i-ten Spalte und $a^2 + b^2 = 1$.
Ganz analog werden die *elementaren Spiegelungsmatrizen* $S(i,k;a,b)$ erklärt als:

$$S(i,k;a,b) := \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & b & \cdots & -a & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$\ell_{D(i,k;a,b)}$ ist die (elementare) Drehung um $\langle e^{(j)} : 1 \leq j \leq n, i \neq j \neq k \rangle_{\mathbb{R}}$ und mit a als Cosinus des Drehwinkels. $\ell_{S(i,k;a,b)}$ ist die (elementare) orthogonale Spiegelung an der Hyperebene

$$\langle e^{(j)} : 1 \leq j \leq n, i \neq j \neq k \rangle_{\mathbb{R}} + \langle be^{(i)} + (1-a)e^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}} .$$

∘

In der Linearen Algebra wird u.A. gezeigt, dass jede invertierbare $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper sich darstellen lässt als Produkt von Elementarmatrizen. Es lassen sich auch genaue obere Schranken angeben für die Anzahl der benötigten Elementarmatrizen. Entsprechendes trifft dann auch für die zugehörigen linearen Abbildungen von K^n nach K^n zu. Analoge Ergebnisse erhält man für orthonormierte Matrizen und damit auch für orthonormierte lineare Abbildungen. Die Ergebnisse können dann wieder für Bewegungen erweitert werden.

7.12 Satz. Erzeugung orthonormierter Matrizen durch elementare Dreh- und Spiegelungsmatrizen

Eine orthonormierte Matrix A aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, ist stets ein Produkt aus elementaren Dreh- und/oder Spiegelungsmatrizen.

(a) Wenn $\det A = 1$, dann ist
$A = D_1 \cdots D_r$ mit elementaren Drehmatrizen $D_1 \cdots D_r$ und $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}$, oder
$A = S_1 \cdots S_r$ mit elementaren Spiegelungsmatrizen $S_1 \cdots S_r$, $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1$ und r gerade.

(b) Wenn $\det A = -1$, dann ist
$A = S_1 \cdots S_r$ mit elementaren Spiegelungsmatrizen $S_1 \cdots S_r$, $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1$ und r ungerade, oder
$A = D_1 \cdots D_r \cdot S(1, n; 1, 0)$ mit elementaren Drehmatrizen $D_1 \cdots D_r$ und $1 \leq r \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Ein Beweis ist auf den Seiten 11-12 in [Sch] ausgeführt. ∘

7.13 Bemerkung. Konsequenzen für orthonormierte lineare Abbildungen und Bewegungen.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, dann ist $T_{-f(0)} \circ f = \ell_A$ mit einer orthonormierten Matrix A aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ und A hat Darstellungen gemäß Satz 7.12. Entsprechend hat ℓ_A Darstellungen als Hintereinanderausführung von elementaren Drehungen und Spiegelungen. Auch f selbst kann allein durch Spiegelungen erzeugt werden. Siehe dazu Satz 7.15. ∘

7.14 Bemerkung. Eulersche Winkel.

Nur wenn $n = 3$, ist $n = \frac{n(n-1)}{2}$ und zugleich $n \in \mathbb{N}_{>0}$! Dies erlaubt es, die Lage von Koordinatensystemen im 3-dimensionalen reellen Raum durch drei Drehwinkel, so genannte *Eulersche Winkel*, zu beschreiben. Die drei elementaren Drehungen in Satz 7.12 und die dazu gehörenden drei Winkel sind nicht eindeutig und werden zur Definition Eulerscher Winkel unterschiedlich festgelegt. Manchmal werden sie auch Kardansche oder Andoyersche Winkel genannt.
In Aufgabe (26) kann in einem Beispiel u.A. eine (lineare) Bewegung mit Determinante 1 als Produkt von drei elementaren Drehungen dargestellt werden. Die entsprechenden Drehwinkel sind mögliche Kandidaten für Eulersche Winkel. Ein schönes Applet zur Visualisierung einer häufig benutzten Variante Eulerscher Winkel finden sie dort:

`http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/mechanik/euler_winkel/`

∘

Insbesondere für höhere Dimensionen ist in Anwendungen ein ganz anderes Verfahren zur Darstellung von Bewegungen durch Spiegelungen wichtig. Es werden dabei nicht nur die elementaren Spiegelungen an Hyperebenen benutzt. Vorteil: Die Anzahl der benötigten Spiegelungen ist begrenzt durch die Dimension und nicht durch einen quadratisch wachsenden Term. Außerdem ist die Berechnung der benötigten Spiegelungen im Allgemeinen weit weniger aufwendig, als die Ermittlung der elementaren Spiegelungen nach Satz 7.12. Man vergleiche das folgende Ergebnis im Fall $n = 2$ auch mit Satz 6.25.

7.15 Satz. (erweitert)
Darstellung von Bewegungen durch Hyperebenenspiegelungen.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung und $\mathsf{det}\, \ell_f$ die Determinante der Matrix von ℓ_f (z.B. bezüglich der Standardbasis).

(a) Wenn $f(0) = 0$, dann ist f die Hintereinanderausführung von höchstens $\left\{\begin{array}{ll} n-1, & \text{wenn } \mathsf{det}\,\ell_f = 1, \\ n, & \text{wenn } \mathsf{det}\,\ell_f = -1, \end{array}\right\}$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen durch 0.

(b) Wenn $f(0) \neq 0$, dann benötigt man eine weitere orthogonale Spiegelungen an einer Hyperebene, die nicht durch 0 geht.

(c) Eine Translation kann als Hintereinanderausführung zweier orthogonaler Spiegelungen an Hyperebenen dargestellt werden.

∘

Die Ergebnisse in Satz 7.15 werden manchmal auch als **Satz von Cartan** bezeichnet.

7.16 Beispiel. Orthogonale Trigonalisierung und Darstellung von Bewegungen mit Hyperebenenspiegelungen.

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wir wenden Spiegelungen an, um die Spalten $a^{(1)}, \ldots, a^{(4)}$ von A zu verändern. In einem ersten Schritt spiegeln wir orthogonal an der Hyperebene

$$\left(\| a^{(1)} \| \cdot e^{(1)} + a^{(1)}\right)^{\perp} .$$

Die entsprechende Spiegelungsmatrix nach (2) sei mit B_1 bezeichnet. Man berechnet:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_1 = B_1 \cdot A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 & \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \mathbf{0} & \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 & \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{3} & -\frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \end{bmatrix} .$$

In zwei weiteren ähnlichen Schritten kann mit orthogonalen Spiegelungen im Unterraum $\left(\mathbb{R}e^{(1)}\right)^{\perp}$ Trigonalisierung erreicht werden. Hinweise zu den weiteren Rechnungen in der Vorlesung, als Text und als Maple-Arbeitsblatt über die Vorlesungsseite im Internet.

<u>Was besagt dies nun für Bewegungen ?</u> Wenn bei diesem Verfahren die gegebene 4×4-Matrix A eine orthonormierte Matrix ist, dann ist zwangsläufig nach dem ersten Schritt der 1-1-Eintrag 1 und alle übrigen Einträge in der ersten Zeile und Spalte sind 0. Beim zweiten Schritt wird der 2-2-Eintrag 1 und alle übrigen Einträge in der zweiten Zeile und Spalte werden 0, analog beim dritten Schritt. Man erhält als Ergebnis der drei Schritte die Matrix $\operatorname{diag}(1, 1, 1, \varepsilon)$, wobei $\varepsilon = \mathsf{det}\, A$, also entweder die Einheitsmatrix oder die Matrix der orthogonalen Spiegelung an der Hyperebene $\langle e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$. Insgesamt erhält man eine Darstellung von A als Produkt von drei oder vier Matrizen von Hyperebenenspiegelungen je nach dem, ob $\mathsf{det}\, A = 1$ oder $\mathsf{det}\, A = -1$ zutrifft. Ein Beispiel hierzu ist in dem oben erwähnten Text und in dem dazu gehörenden Maple-Arbeitsblatt enthalten. ∘

Kongruenz

Der in §6 eingeführte Begriff „affine Äquivalenz " führt zum Begriff der „Kongruenz“, wenn man nur Bewegungen zulässt.

7.17 Definition.

(a) Zwei affine Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißen *kongruent*, wenn $g = h \circ f \circ h^{-1}$ mit einer Bewegung $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(b) Teilmengen M, N von $\mathbb{R}^n$ heißen *kongruent*, wenn $h(M) = N$ mit einer Bewegung $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

∘

7.18 Satz. Die drei wichtigsten Kongruenzklassen.

Sei $n \geq 2$, f eine Bewegung in $\mathbb{R}^n$ und a aus $\mathbb{R}^n$.

(a) Genau dann ist f eine orthogonale Spiegelung an einer Hyperebene, wenn f kongruent ist zu $\ell_{\mathsf{diag}(1,1,\ldots,-1)}$. (1)

(b) Genau dann ist f eine Drehung um $U^\perp$ in der Ebene U durch 0 mit a als Cosinus des Drehwinkels, wenn f kongruent ist zu $\ell_{D(1,2;\,a,b)}$.

(c) Wenn $f = h \circ \ell_{D(i,k;a,b)} \circ h^{-1}$ mit einer Bewegung h, dann ist f die Drehung in der Ebene $\langle h(e^{(i)}), h(e^{(k)}) \rangle_{\mathbb{R}}$ mit Fixraum $\langle e^{(j)} \ : \ 1 \leq j \leq n, i \neq j \neq k \rangle_{\mathbb{R}}$ und a als Cosinus des Drehwinkels.

(d) $\quad \{h \circ T_a \circ h^{-1} : \ h \text{ Bewegung in } R^n \} = \{T_b : \ b \in \mathbb{R}^n \text{ und } \| b \| = \| a \| \}.$

∘

7.19 Satz. Beispiel eines Kongruenzkriteriums.

Seien $a^{(0)}, \ldots, a^{(n)}$ und $b^{(0)}, \ldots, b^{(n)}$ zwei affine Basen in $\mathbb{R}^n$ (Ecken eines Dreiecks, eines Tetraeders, eines Polytops (Simplex), wenn $n = 2, 3, \ldots$).

Die Punktmengen

$$\{a^{(0)}, \ldots, a^{(n)}\} \text{ und } \{b^{(0)}, \ldots, b^{(n)}\}$$

sind genau dann kongruent, wenn

$$\| a^{(i)} - a^{(k)} \| = \| b^{(i)} - b^{(k)} \| \quad \text{für} \quad 0 \leq i < k \leq n \, .$$

∘

Für Dreiecke und Tetraeder handelt es sich um gängige Kongruenzkriterien, die oft als SSS oder $SSSSSS$ abgekürzt werden mit S für Seitenlänge. Ganz ähnlich erhält man weitere Kriterien, wie z.B. SSW oder $SSSWWW$ mit W für Winkel.

Im Zusammenhang mit Satz 7.19 entsteht die **Frage nach dem Grad der Eindeutigkeit der Bewegung *h*, die die Kongruenz zweier Punktmengen herstellt**.

7.20 Beobachtung.

(a) Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und h, h' Bewegungen in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$h(M) = N \text{ und } h'(M) = N \qquad \Leftrightarrow \qquad \big(h'^{-1} \circ h\big)(M) = M \text{ und } h(M) = N$$

(b) $\{h : \ h \text{ Bewegung in } \mathbb{R}^n \text{ und } h(M) = M \}$ ist eine Gruppe bezüglich „∘“ .(2) Sie heißt *Symmetriegruppe der Punktmenge* M und wird mit $\mathsf{Sym}(M)$ bezeichnet. Außerdem sei $\mathsf{Sym}_0(M) = \{h : \ h \text{ Bewegung in } \mathbb{R}^n \text{ und } h(M) = M \}$.

∘

....

(1) $= S(i, n; 1, 0)$ für $1 \leq i \leq n-1$.

(2) Untergruppe der Gruppe der Bewegungen in $\mathbb{R}^n$ oder der Gruppe der bijektive Abbildungen von $\mathbb{R}^n$

7.21 Beispiele von Symmetriegruppen.

∘

7.22 Definition. absolutes Volumen

Das *(absolute) Volumen* des von den affin unabhängige Punkten $a^{(0)}, \ldots, a^{(n)}$ in $\mathbb{R}^n$ aufgespannten *Polytops* definieren wir als

$$V_n(a^{(0)}, \ldots, a^{(n)}) := \frac{1}{n!} \left| \mathsf{det}\,[a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots, a^{(n)} - a^{(0)}\,] \right|$$

∘

7.23 Beispiele

∘

7.24 Bemerkung. Rekursivität des Volumens

Wenn speziell $a^{(0)} = 0$ und $a^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ b^{(i)} \end{bmatrix}$ für $1 \leq i \leq n-1$, und $a^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ b^{(n)} \end{bmatrix}$, dann erhält man

$$\begin{aligned} V_n(0, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) &= \frac{1}{n!} \left| \mathsf{det} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ b^{(1)} & \ldots & b^{(n-1)} & b^{(n)} \end{bmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{n!}\, |\alpha| \left| \mathsf{det}\,[b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1)}] \right| \\ &= \frac{1}{n}\, |\alpha|\; V_{n-1}(0, b^{(1)}, \ldots, b^{(n-1)}) \\ &= \frac{1}{n} \text{ mal Höhe } |\alpha| \text{ mal Grundvolumen/Fläche/Seite} \end{aligned}$$

∘

7.25 Beobachtung.

(a) Invarianz des Volumens unter Bewegungen.
(b) Verzerrungsfaktor unter einer Affinität.

∘

7.26 Definition.

Seien $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$, $n > r$, $w^{(r+1)}, \ldots, w^{(n)}$ eine orthonormierte Basis von $\left(\langle a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} \rangle_{\mathbb{R}}\right)^{\perp}$ und $A = [a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} - a^{(0)}], W = [w^{(r+1)}, \ldots, w^{(n)}]$. Dann sei

$$V_{r,n}(a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} - a^{(0)}) := \frac{1}{r!}\, |\mathsf{det}\,[A, W]|$$

das Volumen des Polytops mit den Ecken $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ in $\mathbb{R}^n$. ∘

7.27 Beobachtung.

Die vorangegangen Definition ist sinnvoll und kompatibel mit der Definition in 7.22. ∘

7.28 Beispiel.

∘

7.29 Bemerkung.

Zur Volumendefininition über eine Gram'sche Determinante und zu Anwendungen. ∘