Modul Geometrie
WiSe 2010/2011
Schmale

Klausur 23. Februar 2011
13.00 bis 15.00
A14-1-101 und A14-1-102

Name	Vorname

Ich habe das Merkblatt gelesen.	Unterschrift:

Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

1 (10P)	2 (10P)	3 (4P)	4 (5P)	5 (7P)	Punkte Klausur	Bonus Punkte	gewichtete Summe[(1)]	**Note**[(2)]

Bei allen Aufgaben, außer bei Aufgabe (4), sind Teilergebnisse und Ergebnisse mit Hilfe von Text fachsprachlich korrekt so darzustellen, dass Ihr Gedankengang und Ihr Rechenweg deutlich erkennbar sind. Nur dann können Ergebnisse angemessen gewertet werden.

Es sind maximal 36 Punkte in der Klausur erreichbar

Dies sind die Aufgaben, viel Erfolg !

(1) **(10P)** In $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte a, b, c, d und die Ebene $\mathcal{E}$ gegeben als

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{E} = a \vee b \vee c\ .$$

(i) (4P) Erklären Sie kurz, wie Sie eine Darstellung von $\mathcal{E}$ als Lösungsmenge einer linearen Gleichung erhalten können und berechnen Sie dementsprechend eine solche Darstellung.[(3)]

(ii) (1P) Stellen Sie die Gerade Γ durch d, die senkrecht auf $\mathcal{E}$ steht, in Parameterform dar.

(iii) (2P) Ermitteln Sie den kürzesten Vektor aus $\mathcal{E}$.

(iv) (3P) Ermitteln Sie einen Punkt e auf Γ, mit dem das absolute Volumen des Tetraeders mit den Ecken a, b, c, e den Wert 1 hat.

(2) **(10P)** Seien $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b' = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung, die durch die folgenden Vorgaben festgelegt ist:

$$f(a) = a',\ f(b) = b',\ f(c) = c'\ .$$

(i) (4P) Erklären Sie kurz, wie Sie eine Matrixdarstellung von f erhalten können berechnen Sie dementsprechend eine solche Darstellung.[(4)]

(ii) (1P) Bestätigen Sie: f ist eine Bewegung.

(iii) (2P) ℓ_f ist eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Gerade in deren Richtung ℓ_f spiegelt.

(iv) (3P) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f.

[(1)] „$= \min\{100 \cdot \dfrac{\textit{erreichte Klausurpunkte}}{\textit{erreichbare Klausurpunkte}} + \textit{Bonuspunkte}, 100\}$".

[(2)] Berechnet mit der Notengeraden $\begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 40 \\ 4 \end{bmatrix}$ und gerundet auf PO-Noten nach den Vorgaben der PO.

[(3)] Ergebnis: Lös $(\varrho[2, 1, 2], -\varrho)$ mit einer von Ihrer Rechnung abhängigen Zahl ϱ.

[(4)] Die Matrix von ℓ_f bezüglich der Standardbasis lautet: $\begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$.

(3) **(4P)** Für affin unabhängige Punkte a, b, c in $\mathbb{R}^2$ definieren wir:
„Ein Punkt x aus $\mathbb{R}^2$ liegt *inmitten* der Punkte a, b, c, wenn $x = \lambda a + \mu b + \nu c$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu + \nu = 1$ <u>und</u> wenn dabei zusätzlich λ, μ, ν positiv sind."

(i) (2P) Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Affinität. Zeigen Sie:
Wenn x inmitten von a, b, c liegt, dann liegt $f(x)$ inmitten von $f(a), f(b), f(c)$.

(ii) (2P) Zeigen Sie: Sind x, x' zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$, die beide inmitten von a, b, c liegen, dann gilt dies auch für deren Mittelpunkt.

(4) **(5P)** Beurteilen Sie folgende Aussagen in den Kästchen mit $\boxed{\text{richtig}}$ oder $\boxed{\text{falsch}}$.

Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. Jede falsche einen Minuspunkt. Keine Antwort ergibt jeweils 0 Punkte. Insgesamt weniger als 0 Punkte sind nicht möglich.
<u>Für die ganze Aufgabe von (a) bis (e) seien a, b, c, d die Eckpunkte eines echten $(a \neq b)$ Quadrats in $\mathbb{R}^2$ und außerdem $\mathcal{A}$ die Menge der affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.</u>

(a) $\exists f \in \mathcal{A}: \quad f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$ $\boxed{}$

(b) $\exists f \in \mathcal{A}: \quad [\ \| f(b) - f(a) \| = \| b - a \| \text{ und } \| f(c) - f(b) \| \neq \| c - b \|\ ]$ $\boxed{}$

(c) $\exists f \in \mathcal{A}: \quad [\ f(a), f(b), f(c) \text{ affin unabhängig und } f(c) = f(d).\ ]$ $\boxed{}$

(d) $\forall f \in \mathcal{A}: \quad [\ f(a) = a \text{ und } f(b) = b] \Rightarrow [f(x) = x \text{ für alle } x \text{ aus } a \vee b]$ $\boxed{}$

(e) $\forall f \in \mathcal{A}: \quad \big(f(a) \vee f(b)\big) \,||\, \big(f(c) \vee f(d)\big)$ $\boxed{}$

(5) **(7P)** In $\mathbb{R}^3$ seien zwei Geraden Γ, Γ' vorgegeben in der Form $\Gamma = a + \mathbb{R}u, \Gamma' = a' + \mathbb{R}u'$, wobei

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad u' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(i) (2P) Γ und Γ' sind windschief.

(ii) (2P) Ihre Bilder bei Zentralprojektion auf die Standardeinbettung $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ (Schnitte von Strahlen durch 0 mit $\mathcal{B}$) schneiden sich in einem Punkt.

(iii) (3P) Geben Sie eine Ebene $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}^3$ an mit dem Stützvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und mit $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ als einem der Richtungsvektoren der Ebene und derart, dass $\big(0 \vee \Gamma\big) \cap \mathcal{E}$ und $\big(0 \vee \Gamma'\big) \cap \mathcal{E}$ parallele Geraden sind.

Erläutern Sie auch hier Ihre Überlegungen und begründen Sie Ihre Rechenschritte!