

Dies ist ein nur anfangs abschnittsweise einigermaßen ausführliches ansonsten stichwortartiges **Kurzskript**, das die eigene Mitschrift und deren Ausarbeitung nicht ersetzen kann und soll.

Inhaltsübersicht

Kapitel I Einführung und Orientierung (1. Woche)

- § 1 Elementare Eigenschaften von Punkten und Geraden
- § 2 Was ist ein Punkt, was ist eine Gerade ?
- § 3 Zum Unterschied zwischen analytischer Geometrie und synthetischer Geometrie

Kapitel II Lineare Algebra und analytische Geometrie (2. bis 11. Woche)

- § 4 Punkte, Geraden, Ebenen, affine Unterräume in einem Vektorraum
- § 5 Schnitt, Verbindung und Erzeugung affiner Unterräume
- § 6 Affine Abbildungen
- § 7 Bewegungen

Kapitel III Anfänge der projektiven analytischen Geometrie (11. bis 13. Woche)

- § 8 Vorbemerkungen, Fluchtpunkte
- § 9 Einbettungen, Strahlenmengen und ihre Schnitte mit Hyperebenen
- § 10 Die projektiven Räume der analytischen Geometrie
- § 11 Zum Wechselspiel „projektiv \leftrightarrow affin“
 - Satz von Desargues und affine Varianten
 - Nullstellenmengen und Schnitte

Zusatz für die letzte Woche (14. Woche):

- § 12 Projektive Geometrie hinter einem DGS-System (am Beispiel Cinderella)

Kapitel I Einführung und Orientierung

In diesem kurzen Anfangskapitel geht es zunächst in §1 darum, schon ein wenig anzudeuten, wie wir in diesem Modul, in dem es hauptsächlich um analytische Geometrie gehen wird, arbeiten werden. Dabei erreichen wir u.A. auch geometrische Eigenschaften, wie sie in der so genannten synthetischen Geometrie als Axiome an den Anfang gestellt werden. Dies wird in §3 benutzt, um das Verhältnis zwischen analytischer und synthetischer Geometrie zu erläutern. Außerdem werden in §2 die uns scheinbar unmittelbar verständlichen Begriffe „Punkte“ und „Geraden“ auf ihren tatsächlichen Gehalt hin hinterfragt.

Im weiteren Verlauf des Moduls wird es danach ausschließlich um analytische Geometrie gehen, m.a.W. um Geometrie, die in Vektorräumen zu Hause ist und vom Zusammenspiel von linearer Algebra und geometrischen Vorstellungen lebt. Da das Studium der linearen Algebra bei vielen Teilnehmenden bereits etliche Semester zurückliegt und oft sehr wenig geometrisch geprägt war, werden dieses mal noch deutlich ausführlicher grundlegende Themen der linearen Algebra wiederholt und in geometrisch motivierte Kontexte eingebracht. Dies trifft besonders zu für das nächste umfangreiche Kapitel II „Lineare Algebra und analytische Geometrie“.

Im Folgenden wird oft anfangs V ein Vektorraum über einem Körper K sein, wie Sie es aus der linearen Algebra im ersten Bachelor-Semester gewohnt sind. Da wir nur endlichdimensionale Geometrie betreiben wollen, genügt es im Grunde, sich auf den Fall $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$, zu konzentrieren. Wir werden das auch tun, sobald es von Vorteil ist. Der zu Grunde liegende Körper K wird fast immer aus rationalen oder, allgemeiner, reellen Zahlen bestehen oder in wenigen Fällen ein gängiger endlicher Körper sein. In einigen späteren Abschnitten werden wir sogar ausschließlich reelle Zahlen zu Grunde legen.

Ein großer Vorteil der linearen Algebra ist es, dass bei ganz vielen grundlegenden Begriffen und Resultaten zunächst hinsichtlich der Dimension keine Einschränkung besteht. Dies soll im Folgenden und auch schon in dieser Einleitung nicht dadurch verschleiert werden, dass wir künstlich Definitionen und erste Eigenschaften auf bestimmte Dimensionen beschränken. Bei konkreten geometrischen Problemstellungen, Anwendungen und Aufgaben werden wir es aber am häufigsten mit den Dimensionen 0 bis 5 zu tun haben.

§ 1 Elementare Eigenschaften von Punkten und Geraden in einem Vektorraum.

Die Elemente eines Vektorraums V nennen wir je nach Bedarf Punkte oder Vektoren.⁽¹⁾

1.1 Definition.

Eine Teilmenge g des K -Vektorraums V heißt *Gerade (in Parameterdarstellung)*, wenn mit $a, v \in V, v \neq 0$, gilt: $g = a + Kv$. Dabei ist $a + Kv = \{a + \lambda v : \lambda \in K\}$. Dabei ist a ein *Aufpunkt* oder *Stützvektor*, v ein *Richtungsvektor* und Kv die *Richtung* der Geraden g .

Für $a + Kv$ schreiben wir auch $a + \langle v \rangle_K$, wobei $\langle v \rangle_K$ der lineare Aufspann von v ist. ◦

Nach dieser Definition ist eine Gerade eine Punkt- oder Vektormenge, die auf eine bestimmte Weise dargestellt werden kann. Parameterdarstellungen sind hinsichtlich Stütz- und Richtungsvektor nicht eindeutig. Wir werden aber gleich sehen, dass wenigstens die Richtung einer Geraden durch die Gerade als Punktmenge eindeutig bestimmt ist.

Sprechweisen: Wir sagen, die Gerade g geht durch den Punkt b oder b liegt auf g , wenn $b \in g$.

Hinweis zu den Schreibweisen: In aktuellen Schulbüchern findet man auch folgende Schreibweise⁽²⁾:

„ Die Gerade g durch a mit Richtungsvektor v hat die Parameterdarstellung

$$g : \quad a + kv, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{“}$$

.....
⁽¹⁾Zum Unterschied Punkt/Vektor kommen wir später in §2.

⁽²⁾siehe Seite 236 in Elemente der Mathematik (EdM) Niedersachsen 11/12, Westermann/Schrödel, 2010.

Dies ist dann letztlich identisch mit unserer Mengenschreibweise mit geschweiften Klammern. **Falsch**, außer wenn $v = 0$, wird es allerdings, wenn geschrieben wird:

$$g = a + kv, \quad k \in \mathbb{R},$$

denn g ist eine Menge und $a + kv$ ist für jedes k aus K ein einzelner Punkt.

Für unsere Geraden in Parameterdarstellung gilt folgende

1.2 Regel.

Zwei Geraden sind genau dann gleich, wenn sie, bezogen auf irgendwelche Parameterdarstellungen, dieselbe Richtung und mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Insbesondere ist also die Richtung einer Geraden in einer Parameterdarstellung durch die Gerade eindeutig bestimmt. ◦

1.3 Beispiel.

$$V = \mathbb{R}^2, \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g = a + \mathbb{R}v = \left\{ \begin{bmatrix} 1 + \lambda \\ 1 - \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad a' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix}, \quad v' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix},$$

$$g' = a' + \mathbb{R}v' = \left\{ \begin{bmatrix} a'_1 + \lambda v'_1 \\ a'_2 + \lambda v'_2 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{Wann ist } g = h? \quad \circ$$

Als erste Beispiele analytisch geometrischen Arbeitens leiten wir nun ein paar grundlegende Eigenschaften her, wie sie in der synthetischen Geometrie zum Ausgangspunkt genommen werden. Weitere Erläuterungen zur synthetischen Geometrie folgen in §3.

1.4 Beobachtung.

(E1) Zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ gibt es genau eine Gerade g , die durch $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ geht. Sie heißt *Verbindungsgerade* zu $a^{(1)}, a^{(2)}$ und hat z.B. die Parameterdarstellung $g = a^{(1)} + K(a^{(2)} - a^{(1)})$. Eine häufige Schreibweise für die Verbindungsgerade von $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ ist $a^{(1)} \vee a^{(2)}$. ◦

1.5 Folgerung

Zwei verschiedene Geraden schneiden sich höchstens in einem Punkt. ◦

1.6 Beobachtung.

Sei V ein **zweidimensionaler** K -Vektorraum.

(a) (E2) Ist g eine Gerade und b ein Punkt außerhalb von g ($b \in V, b \notin g$), dann gibt es genau eine Gerade h derart, dass h durch b geht und g nicht trifft ($b \in h$ und $h \cap g = \emptyset$). h heißt dann *Parallele* zu g durch b .

(b) Zwei verschiedene Geraden haben genau dann keinen Punkt gemeinsam, wenn sie die gleiche Richtung haben.

Definition im zweidimensionalen Fall: zwei Geraden g, h heißen *parallel* ($g \parallel h$), wenn sie die gleiche Richtung haben. \parallel ist dann eine Äquivalenzrelation.⁽³⁾ ◦

Wie viele Punkte gibt es?

1.7 Beobachtung.

(a) Sei V endlichdimensional und $\neq \{0\}$, dann ist $|V| = \begin{cases} \infty & \text{wenn } |K| = \infty \\ |K|^{\dim_K V} & \text{wenn } |K| < \infty \end{cases}$.

(b) Für eine Gerade in einem K -Vektorraum gilt stets $|g| = |K|$ (gleich mächtig).

(c) (E3) In einem zweidimensionalen K -Vektorraum gibt es drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. ◦

.....

⁽³⁾Letzteres trifft nicht zu, wenn man, gleiche Geraden nicht parallel nennt, was durchaus auch anzutreffen ist.

1.8 Beispiel.

- (a) $K = \mathbb{R}$, $|\text{Gerade}| = |\mathbb{R}|$.
- (b) $K = \mathbb{Q}$, Geraden sind abzählbar.
- (c) Ist K ein endlicher Körper mit p^r Elementen, p eine Primzahl, dann enthält auch jede Gerade p^r Punkte.
- (d) $K = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^2$. Alle Geraden bestehen aus nur zwei Punkten und insgesamt gibt es 4 Punkte und 6 Geraden.

◦

Die Beschreibung unserer Geraden kann im zweidimensionalen Fall auch durch eine lineare Gleichung geschehen.

1.9 Beobachtung.

Eine Teilmenge g von K^2 , K ein Körper, ist genau dann eine Gerade, wenn mit geeigneten $A \in K^{1 \times 2}$, $A \neq 0$ und b in K gilt

$$g = \text{Lös}(A, b) \quad (= \{x \in K^2 : Ax = b\}) .$$

◦

Diese Darstellung von Geraden in einer Ebene ist Gegenstand der Übungsaufgabe (1). Sie ist Spezialfall der Darstellung affiner Unterräume durch lineare Gleichungssysteme, die wir bald kennen lernen oder ggf. wiederholen werden.

§ 2 Was ist ein Punkt, was ist ein Vektor, was eine Gerade ??

Letztlich kann man das ehrlicherwise nicht genau sagen. Historische Versuche wie „Ein Punkt ist, was keine Ausdehnung hat“ oder „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“⁽⁴⁾ helfen nicht wirklich weiter. Ich empfehle u.A. den folgenden Link im Internet http://wikis.zum.de/geowiki/index.php/Eigentlich_ganz_einfach_und_doch_so_kompliziert:_Punkte,_Geraden,_Ebenen (genau so!). In der mathematisch aufgebauten Geometrie wurde schließlich darauf verzichtet, dazu überhaupt etwas zu sagen. Ein Punkt ist ein Element einer Menge, die wir als Menge unserer Punkte ansehen wollen. Geraden sind dann gewisse Teilmengen von Punkten, die bestimmten Regeln genügen müssen. Wie wir in §1 gesehen haben, sind Geraden in der analytischen Geometrie genau diejenigen Teilmengen von Punkten, die eine gewisse Parameterdarstellung haben oder (im zweidimensionalen Fall) Lösungen einer gewissen linearen Gleichung sind.

Und was sind dann Vektoren? In dem oben zitierten Schulbuch werden Vektoren eingeführt über Verschiebungen im \mathbb{R}^3 , also über Abbildungen, die wir später auch Translationen nennen werden. Diese Abbildungen werden dann allerdings in Form von Koordinatentripeln dargestellt genauso wie zuvor Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt wurden. Einziger Unterschied: Punkte werden als Zeilen, Vektoren als Spalten geschrieben und mit Punkten wird nicht gerechnet. Diese Unterscheidung wird am Beginn der allgemeinen affinen Geometrie⁽⁵⁾ formalisiert. Sobald man aber wieder zum konkreten Fall etwa des \mathbb{R}^3 zurückkehrt, hat man wieder die gleiche Situation, dass Punkte und Vektoren beide durch unterschiedlich interpretierte Zahlentripel beschrieben werden.

Ein Nachteil der Festlegung auf Verschiebungen beim Vektorbegriff ist m.E., dass es dabei schwieriger wird, ein physikalisches Kräfteparallelogramm zu erklären.

Wir werden in diesem Modul keine scharfe begriffliche Trennung zwischen Punkten und Vektoren vornehmen. Die Elemente eines Vektorraumes sind halt „Vektoren“, wenn sie etwa zu Ecken eines Dreiecks gehören, nennen wir sie auch Punkte. Beim Rechnen schreiben wir Punkte oder

.....

⁽⁴⁾Letzteres bei Euklid

⁽⁵⁾siehe etwa: Gerd Fischer, Analytische Geometrie, Vieweg, 2001.

Vektoren je nach Bedarf als Zeilen oder Spalten. Verschiebungen (Translationen) sind für uns später sehr spezielle affine Abbildungen: Die Verschiebung um w in einem Vektorraum V ist die Abbildung

$$T_w : V \rightarrow V, v \mapsto v + w .$$

Die Addition von als Verschiebungen interpretierten Vektoren erscheint dann als Hintereinanderausführung von Abbildungen:

$$T_w \circ T_{w'} : V \rightarrow V, v \mapsto T_w(T_{w'}(v)) .$$

Dabei ist auf Grund der Kommutativität der Vektoraddition erwartungsgemäß

$$T_w \circ T_{w'} = T_{w+w'} ,$$

denn es gilt punktweise für $v \in V$

$$T_w \circ T_{w'}(v) = T_w(T_{w'}(v)) = (v+w') + w = v + (w+w') = T_{w+w'}(v) = (v+w) + w' = T_{w'} \circ T_w(v) .$$

§ 3 Zum Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie.

Häufig nimmt in Geometrieveranstaltungen an pädagogischen Hochschulen und Universitäten die so genannte **Inzidenzgeometrie** und/oder die weiterführende **synthetische Geometrie** einen breiten Raum ein. Dabei werden „geometrisch einleuchtende“ Eigenschaften von „Punkten“, „Geraden“, „Winkeln“, etc. als Axiome für Elemente von nicht näher beschriebenen Mengen an den Anfang gestellt und die dann gültigen „geometrischen“ Sätze allein aus den jeweiligen Axiomen hergeleitet. Was etwa ein „Punkt“ oder eine „Gerade“ ist, wird nicht mehr thematisiert. Unter einer **Geometrie** versteht man dann ein bestimmtes „geometrisch motiviertes“ Axiomensystem zusammen mit den daraus herleitbaren Sätzen.

Das Vorgehen der synthetischen Geometrie lässt sich sehr gut illustrieren am Beispiel ebener Inzidenzgeometrien. Letztere sind zu gleich auch ein leicht zugängliches Beispiel für mathematisch-deduktives Arbeiten. Beides erklärt m.E. zu einem wichtigen Teil deren Präsenz in einführenden Geometrieveranstaltungen.

Sei P eine Menge. Ihre Elemente werden „Punkte“ genannt. Sei weiter G eine Menge von Teilmengen von P . Die Elemente von G werden „Geraden“ genannt. Man sagt, ein Punkt p aus P liegt auf der Geraden g aus G , oder g geht durch p , wenn $p \in g$. Man sagt, Punkte sind kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Das Paar (P,G) wird „ebene affine Inzidenzgeometrie“ genannt, wenn folgende Axiome erfüllt sind.

A₁ Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

A₂ Zu einer Geraden g und einem Punkt a , der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h durch a ohne gemeinsamen Punkt mit g .

A₃ Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach **A₁** durch zwei verschiedenen Punkte a, b festgelegte Gerade wird mit $a \vee b$ bezeichnet. Wenn zwei Geraden g, h sich nicht schneiden, dann werden sie parallel genannt und es wird $g \parallel h$ geschrieben.

Wie wir in §1 gesehen haben sind diese drei Axiome stets erfüllt, wenn P ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K ist und wenn G die Menge der Geraden ist, wie wir sie in §1 betrachtet haben. Insbesondere trifft dies natürlich dann auch für $K = \mathbb{R}$ und $P = \mathbb{R}^2$ zu, also die vermeintlich vertraute reelle Zahlenebene mit den üblichen „geraden“ Geraden. Hierzu bietet die Aufgabe (3) eine Relativierung.

Die obigen drei Axiome sind im Kontext der analytischen Geometrie lediglich elementare Eigenschaften (siehe **(E1)**, **(E2)**, **(E3)** in §1) in einem bereits auf andere Weise axiomatisch entworfenen Kontext: Körperaxiome und Vektorraumaxiome.

Einer der Höhepunkte der weiterführenden synthetischen Geometrie wird erreicht durch Hinzunahme des folgenden geometrisch einleuchtenden Axioms

A₄ Seien die Punkte z, a, a' verschieden und kollinear, ebenso z, b, b' und z, c, c' . Außerdem seien die drei dadurch gegebenen Geraden $z \vee a, z \vee b, z \vee c$ verschieden.
 Wenn dann $a \vee b \parallel a' \vee b'$ und $b \vee c \parallel b' \vee c'$, dann ist auch $c \vee a \parallel c' \vee a'$.
 (affiner Satz von Desargues (Gérard, 1593-1662))

Ein Applet zu **A₄** ist über die Vorlesungsseite von 2009/10 im Internet zugänglich.

Nach einiger Anstrengung kann folgendes Resultat erreicht werden

Satz 4: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G) . Gilt zusätzlich **A₄**, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2, G =$ Menge der Geraden in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Geraden in K^2 mit einem Körper K , der allerdings nicht notwendigerweise kommutativ⁽⁶⁾ ist.

Mindestens genauso erstaunlich ist das folgende Resultat

Satz 5: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G) . Gilt zusätzlich **A₅**, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2, G =$ Menge der Geraden in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Geraden in K^2 mit einem **kommutativen** Körper K . Dabei ist **A₅** das folgende ebenfalls geometrisch einleuchtende Axiom:

A₅ Seien die Punkte a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 jeweils verschieden und kollinear auf verschiedenen Geraden.
 Wenn dann $a_1 \vee b_2 \parallel a_2 \vee b_3$ und $a_2 \vee b_1 \parallel a_3 \vee b_2$, dann ist auch $a_1 \vee b_1 \parallel a_3 \vee b_3$.
 (affiner Satz von Pappos (von Alexandria, ca 300 n. Chr.))

Auch zu **A₅** ist ein Applet über die Vorlesungsseite von 2009/10 im Internet zugänglich.

Eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der Geometrie als Wissenschaft bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts spielte die Frage nach einem Axiomensystem das so erweitert ist, dass schließlich bis auf „Isomorphie“ nur noch eine reelle Zahlenebene, bzw ein reeller dreidimensionaler Raum (jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen für Winkel- und Längenmessung) in Frage kommt, also genau der Kontext, von dem die reelle euklidische analytische Geometrie der Ebene und des Raumes von Anfang an ausgeht.

Ein noch nicht vollständiger Vorläufer für ein solches Axiomensystem ist bereits von Euklid aufgestellt und untersucht worden. Ein vollständiges Axiomensystem für die dreidimensionale (reelle) euklidische Geometrie ist von David Hilbert 1899 angegeben worden. Es wird, modifiziert für den einfacheren Fall einer Ebene, in dem unten angegebenen Buch von Horst Knörrer entwickelt. Eine Geometrie, der das Hilbert'sche Axiomensystem zu Grunde liegt, wird häufig als Euklidische Geometrie des Raumes bezeichnet. Sie ist tatsächlich bis auf eine Inzidenz, Winkel und Länge erhaltende bijektive Abbildung („Isomorphie“) die gleiche, die wir heute als analytische Geometrie des \mathbb{R}^3 mit Standardskalarprodukt oder analytische euklidische Geometrie des \mathbb{R}^3 bezeichnen. Es handelt sich also aus heutiger Sicht lediglich um einen Spezialfall der analytischen Geometrie.

Literaturangaben:

- Klassiker: Günter Pickert: Ebene Inzidenzgeometrie, Diesterweg, 1971.
- Meine Empfehlung: Max Köcher und Aloys Krieg: Ebene Geometrie, Springer, 2007.
- Horst Knörrer: Geometrie, Vieweg, 2006.
- Siegfried Krauter: Einführung in die endliche Geometrie, Skript PH Ludwigsburg, 2005.

Es gibt natürlich viel mehr Literatur dazu, vieles davon in der Bereichsbibliothek.

.....
⁽⁶⁾Im nicht-kommutativen Fall spricht man von einem Schiefkörper. Wichtige Teile der linearen Algebra können unbeschadet auch über nicht-kommutativen Körpern entwickelt werden. Dazu gehören lineare Gleichungen und deren Lösungsräume bzw. affine Unterräume. Statt von Vektorräumen wird dann meist von Modulen über einem Schiefkörper gesprochen. Ein Modul über einem nicht unbedingt kommutativen Körper K wird K -Vektorraum genannt. Die Theorie dazu findet man in den etwas umfangreicheren Algebralehrbüchern, wie z.B. dem von Günter Scheja und Uwe Storch im Teil I.

Kapitel II Lineare Algebra und analytische Geometrie

§ 4 Punkte, Geraden, Ebenen, affine Unterräume in einem Vektorraum.

Wie bisher ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K , oft ist $V = K^n$ und K einer der Ihnen geläufigen Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \dots$

4.1 Definition.

Sei Γ eine Teilmenge von V . Γ heißt *affiner Unterraum von V* , wenn $V = \emptyset$ oder $\Gamma = a + U$ mit a aus V und mit einem Untervektorraum U von V . Dabei ist $a + U = \{a + u : u \in U\}$.

U heißt *Richtung* von Γ , die Vektoren (im Zweifelsfall $\neq 0$) aus U sind *Richtungsvektoren* und a ist ein *Stützvektor* oder ein *Aufpunkt*.

Man setzt fest: $\dim_K \Gamma := \dim_K U$ und $\dim_K \emptyset := -1$.

Der affine Unterraum Γ heißt *Punkt, Gerade, Ebene* oder *Hyperebene*, wenn $\dim_K \Gamma = 0, 1, 2$ oder $\dim_K V - 1$.

Nach Wahl einer Basis oder eines Erzeugendensystems $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$ für U hat U die Darstellung $U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$ ⁽⁷⁾ und $a + U$ heißt dann *affiner Unterraum in Parameterdarstellung*. Manchmal sagen wir das auch schon vor der Wahl eines Erzeugendensystems, da man ja im konkreten Fall eines bestimmen könnte. ◦

Genau genommen geht es nur um Parameterdarstellungen für Untervektorräume und dann noch um die Wahl eines Aufpunktes. Daher interessiert uns folgendes Resultat aus der linearen Algebra zur Mehrdeutigkeit von Parameterdarstellungen.

4.2 Beobachtung.

Seien $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}, w^{(1)}, \dots, w^{(s)}$ aus K^n . Sei $r = s$. Dann gilt

$$\langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K = \langle w^{(1)}, \dots, w^{(r)} \rangle_K \Leftrightarrow \text{Mit einer invertierbaren Matrix } Q \in K^{r \times r} \text{ ist}$$
$$[u^{(1)}, \dots, u^{(r)}]Q = [w^{(1)}, \dots, w^{(r)}]$$
$$(\text{ oder } [w^{(1)}, \dots, w^{(r)}]Q^{-1} = [u^{(1)}, \dots, u^{(r)}])$$

Man kann insbesondere (warum?) die Matrix $[u^{(1)}, \dots, u^{(r)}]$ durch elementare *Spalten-*Umformungen in die Matrix $[w^{(1)}, \dots, w^{(r)}]$ überführen oder umgekehrt.

Was bedeutet die Aussage im Fall $r = 1$?

Für LA-Spezialisten: Wie muss die Aussage lauten, wenn wir nicht $r = s$ voraussetzen ? ◦

Stets ist aber die Richtung eines affinen Unterraums eindeutig. Regel 2 aus §1 gilt unverändert:

4.3 Beobachtung.

- (a) Zwei affine Unterräume sind genau dann gleich, wenn sie, bezogen auf irgendwelche Parameterdarstellungen, dieselbe Richtung und mindestens einen Punkt gemeinsam haben.
- (b) Die Richtung eines affinen Unterraumes in einer Parameterdarstellung ist eindeutig bestimmt.
- (c) Als Aufpunkt kann jeder beliebige Punkt aus einem affinen Unterraum gewählt werden. ◦

4.4 Beispiel.

Sind die beiden folgenden Ebenen gleich?

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

.....
⁽⁷⁾Zur Erinnerung: Der lineare Aufspann von Vektoren $w^{(1)}, \dots, w^{(m)}$ in einem Vektorraum ist die Menge $\langle w^{(1)}, \dots, w^{(m)} \rangle_K = \{\lambda_1 w^{(1)} + \dots + \lambda_m w^{(m)} : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K\}$ und stets ein Untervektorraum.

Spaltenumformungen (vgl. Beobachtung 4.2) zeigen zunächst, dass die Richtungen übereinstimmen, denn $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ hat ebenso wie $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/5 & 7/5 \end{bmatrix}$ als normierte Spaltenstufenform (oder, dem englischen Sprachgebrauch angepasst, reduzierte Spalten-Echelonform (rcef)). Nun ist noch zu klären, ob $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Da

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ist dies der Fall und mit Beobachtung 4.3 ergibt sich $\Gamma = \Delta$.

Mit der Berechnung des Schnittes affiner Unterräume beschäftigen wir uns demnächst. ◦

Als Nächstes wollen wir affine Unterräume als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme darstellen. Dazu ist es wieder notwendig, sich zunächst einmal an die Ergebnisse aus der linearen Algebra zu erinnern und diese für unseren Modul einheitlich zu beschreiben und zu bezeichnen. Sei K ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* ist gegeben durch eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in K^{m \times 1}$ und wird meist in der kompakten Form $Ax = b$ angeschrieben⁽⁸⁾ verbunden mit der Aufforderung, Vektoren $v \in K^n$ zu finden derart, dass nach Einsetzen von v für den unbestimmten Vektor x eine gültige Gleichung $Av = b$ entsteht. Die Menge all dieser Vektoren ist die *Lösungsmenge*

$$\text{Lös}(A, b) = \{v \in K^n : Av = b\}.$$

Die grundlegenden Ergebnisse aus der linearen Algebra dazu sind:

4.5 Satz.

- (a) $\text{Lös}(A, b) = \emptyset$ oder $\text{Lös}(A, b) = a + \text{Lös}(A, 0)$. Dabei ist $\text{Lös}(A, 0)$ ein Untervektorraum. M.a.W.: $\text{Lös}(A, b)$ ist stets ein affiner Unterraum.
- (b) Wenn es Lösungen gibt, dann ist $\dim_K \text{Lös}(A, b) = \dim_K \text{Lös}(A, 0) = n - \text{Rang } A$.
- (c) „geometrisches“ Lösbarkeitskriterium:

$$\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in \text{SR}(A) \text{ }^{(9)} \Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } [A|b]$$

- (d) Mit jeder invertierbaren $m \times m$ -Matrix P ist

$$\text{Lös}(PA, Pb) = \text{Lös}(A, b).$$

Insbesondere verändern elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Matrix $[A, b]$ die Lösungsmenge nicht.

- (e) Mit jeder invertierbaren $n \times n$ -Matrix Q ist

$$Q \cdot \text{Lös}(AQ, b) = \text{Lös}(A, b).$$

◦

In der Vorlesung wird Satz 4.5 nicht bewiesen. Wir illustrieren das nun alles an Beispielen. Dabei werden wir auch sehen oder wiederholen wie man (einfache) lineare Gleichungssysteme (mit schönen Daten) durch elementare Umformungen lösen kann.

.....

⁽⁸⁾Nur wenn $m > 1$, liegt wirklich ein Gleichungssystem vor. Wenn $m = 1$, dann liegt eine einzelne lineare Gleichung vor aber möglicherweise mit mehreren Unbekannten, den Komponenten von x .

⁽⁹⁾Spaltenraum der Matrix A

4.6 Beispiel.

(a) $n = 2, K = \mathbb{Q}$:

$$2r + s = 1 \quad (1)$$

$$r + s = 0 \quad (2)$$

$$3r - 2s = 1 \quad (3)$$

Gleichung (2) ergibt $s = -r$. Einsetzen in Gleichung (1) ergibt $r = 1$. Das Gleichungssystem ist aber damit wegen Gleichung (3) nicht lösbar! Das System in Matrixform lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b$$

Hier ist $\text{Rang } A = 2$ und $\text{Rang } [A, b] = 3$ (vgl. Satz 4.5 (c)).

(b) Spätestens ab $n=3$ ist i.A. die Matrixschreibweise auch für die Handrechnung vorteilhafter. Davon abgesehen ist sie auch die Grundlage für Dateneingaben in Rechner, die lineare Gleichungssysteme lösen können.

Gegeben seien (über \mathbb{Q})

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen an der Matrix $[A|b]$ führen zur Matrix

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 2 \end{array} \right].$$

Satz 4.5 (d) sagt uns nun (falls wir richtig gerechnet haben), dass

$$\text{Lös}(A', b') = \text{Lös}(A, b).$$

Da ich auch die Transformationsmatrix P (Produkt der zu meinen Zeilenumformungen gehörenden Elementarmatrizen) mit $PA = A', Pb = b'$ angeben will, führe ich die gleiche Rechnung an der Matrix $[A \ | \ b \ | \ E_3]$ durch mit der 3×3 -Einheitsmatrix E_3 . Dann erhalte ich nämlich als Ergebnis $[A' \ | \ b' \ | \ P]$ (Begründung?).

Die Bestimmung von $\text{Lös}(A', b')$ kann auf verschiedene Weise erfolgen, z.B. durch so genanntes Rückwärtseinsetzen, bei dem zuerst die Lösungen der untersten Gleichung des Gleichungssystems $A'x = b'$ bestimmt werden und dann nach und nach die der jeweils darüber liegenden. Insbesondere wenn ein Gleichungssystem für mehrere rechte Seiten gelöst werden soll ist auch hier die Matrixschreibweise übersichtlicher und vorteilhafter. Nachdem eine Zeilenstufenform erreicht wurde, kann man an die Matrix A' einen Einheitsblock wie folgt anfügen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & \\ - & - & - & - & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right].$$

Mit Spaltenumformungen wird der obere Block A' in eine Spaltenstufenform gebracht:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & -5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 | 0 \\ - \\ Q \end{bmatrix}$$

In unserem Beispiel ist nun für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ der Vektor $Q \cdot \begin{bmatrix} b' \\ - \\ \lambda \end{bmatrix}$ eine Lösung (vgl. Satz 4.5).

(e) und $\text{Lös}(A, b) = Q \cdot \text{Lös}(A'b') = Q \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{Q} \right\}.$

Beachte: $\text{Lös}(A, b)$ ist nach Satz 4.5 (a) ein affiner Unterraum. Unser Rechenergebnis zeigt, dass seine Dimension 1 ist. Es liegt also eine Gerade im 4-dimensionalen Raum \mathbb{Q}^4 vor.

◦

Darstellung affiner Unterräume als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

4.7 Satz.

Eine Teilmenge Γ von K^n ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn mit einer Matrix $A \in K^{m \times n}$, m geeignet, und einem Vektor b aus K^m gilt: $\Gamma = \text{Lös}(A, b)$.

◦

4.8 Beispiel.

(a) Wie erhält man ein Gleichungssystem für einen Untervektorraum U von K^n (affiner Unterraum durch 0) in Parameterdarstellung?

Sei etwa $U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$. Bestimme (siehe Beweis von Satz 1.8) ein Erzeugendensystem $w^{(1)}, \dots, w^{(s)}$ von $\text{Lös} \left(\begin{bmatrix} {}^t u^{(1)} \\ \vdots \\ {}^t u^{(r)} \end{bmatrix}, 0 \right)$.⁽¹⁰⁾ Dann ist $U = \text{Lös}(A, 0)$ mit $A = \begin{bmatrix} {}^t w^{(1)} \\ \vdots \\ {}^t w^{(s)} \end{bmatrix}$.

Z.B. erhält man für $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_K$ nach kurzer Rechnung

$$U = \text{Lös} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, 0 \right).$$

Beachte: Wenn z.B. $K = \mathbb{Z}_2$, dann ist $-1 = 1$ und $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

Wenn $K = \mathbb{R}$ und \mathbb{R}^n (z.B.) ausgestattet ist mit dem Standardskalarprodukt, dann ist

⁽¹⁰⁾Im Kontext der linearen Algebra und der analytischen Geometrie ziehe ich die Schreibweise ${}^t A$ der Schreibweise A^T für die transponierte Matrix vor. Oft hat T eine andere Bedeutung und A^{Symbol} , beschreibt bei quadratischen Matrizen normalerweise eine Matrizenpotenz.

Lös $\left(\begin{bmatrix} \mathfrak{t}u^{(1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{t}u^{(r)} \end{bmatrix}, 0 \right) = U^\perp$ und (!) $U \cap U^\perp = \{0\}$, $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$. Was bewirkt dies für $n =$

2, 3 ? Auf Normalenvektoren und Ähnliches kommen wir später zurück. Dass man affine Unterräume durch lineare Gleichungen beschreiben kann hat jedenfalls zunächst nichts mit der vertrauten Orthogonalität in einem Vektorraum mit Skalarprodukt zu tun.

(b) Gleichungssystem für eine Gerade Γ in K^n , $n \geq 2$.

Sei etwa $\Gamma = a + Ku$, $u \neq 0$. Dann ist $\dim_K \text{Lös}(\mathfrak{t}u, 0) = n - 1$. Sei nun $w^{(1)}, \dots, w^{(s)}$ eine Basis des Lösungsraumes (oder auch nur ein Erzeugendensystem), dann erhält man mit

$A = \begin{bmatrix} \mathfrak{t}w^{(1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{t}w^{(s)} \end{bmatrix}$ und $b = Au$ als Ergebnis: $\Gamma = \text{Lös}(A, b)$. Wenn etwa $n = 3$, $K = \mathbb{Q}$ und

$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, dann ist $w^{(1)}, w^{(2)}$ mit $w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ eine mögliche Basis

von $\text{Lös}(\mathfrak{t}u, 0)$ und wir erhalten: $\Gamma = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. Probe! Vergleiche auch mit Beispiel 4.6 (b).

(c) Gleichung einer Ebene in K^3 . Seien $U = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_K$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\Gamma = a + U$. U ist ein

zweidimensionaler Untervektorraum von K^3 . Mit $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ erhält man $\text{Lös}(B, 0) =$

$\langle w \rangle_K$ mit $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Setze $A := \mathfrak{t}w$ und $b = Au$, dann ist

$$\Gamma = \text{Lös}(A, b) = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, 1 + 1 + 1\right).$$

(d) Bemerkung für Neugierige: *Kontrollmatrix eines Codes*.

Ein linearer Code⁽¹¹⁾ ist nichts anderes als ein Untervektorraum eines Vektorraums K^n mit einem endlichen Körper K mit besonderen für die Kodierung interessanten geometrischen Eigenschaften. Bekannteste Vertreter sind Hamming Codes, so genannte BCH-Codes oder etwa Reed-Solomon Codes, die in alltäglichen Produkten der Informationsverarbeitung massenhaft zur Anwendung kommen. Sei also C im Spezialfall des Körpers \mathbb{Z}_2 ein Untervektorraum von \mathbb{Z}_2^n . Eine Kontrollmatrix $H \in \mathbb{Z}_2^{m \times n}$ von C ist einfach eine Matrix mit der Eigenschaft $C = \text{Lös}(H, 0)$.

Beispiel: Der so genannte (7,4)- *Hamming Code* über dem Körper \mathbb{Z}_2 wird erzeugt von den Zeilen der folgenden Matrix G , einer so genannten *Erzeugermatrix* des Codes:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es handelt sich um einen 4-dimensionalen Unterraum des 7-dimensionalen Raumes \mathbb{Z}_2^7 . Jede Kontrollmatrix dieses Codes hat als *Spalten* alle von 0 verschiedenen Vektoren von \mathbb{Z}_2^3 in einer gewissen Anordnung.

o

.....

⁽¹¹⁾Mehr zu linearen und anderen Codes finden Sie z.B. in zugänglicher Form in dem Buch *Einführung in die Kombinatorik* von Konrad Jacobs und Dieter Jungnickel, de Gruyter, 2. Auflage 2004.

Wie eindeutig sind A und b bei Satz 4.7 ?

4.9 Beobachtung.

Mit $A \in K^{m \times n}, A' \in K^{m \times n}, b \in K^m, b' \in K^m$. gilt:

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A, 0) = \text{Lös}(A', 0) &\Leftrightarrow \text{ZR}(A) = \text{ZR}(A') \quad (12) \\ \text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(A', b') &\Leftrightarrow \text{ZR}([A, b]) = \text{ZR}([A', b']) \\ &\Leftrightarrow \text{Es gibt eine invertierbare Matrix } P \in K^{m \times m} \\ &\text{derart, dass } PA = A' \text{ und } Pb = b' \end{aligned}$$

◦

Vergleiche mit Satz 4.5 (d) und Beobachtung 4.2.

4.10 Beispiel.

- (a) Im Beispiel 4.8 (a) kann man gut sehen, wie die gerade beschriebene Mehrdeutigkeit zustande kommt, denn die Auswahl der $w^{(i)}$ ist willkürlich.
- (b) Wie sieht es im Beispiel 4.4 aus ?
Stelle Γ oder Δ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems dar.
- (c) Ein leicht überschaubares Beispiel: Seien $\Gamma = \text{Lös}(A, b), \Gamma' = \text{Lös}(A', b')$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ist $\Gamma = \Gamma'$ und wenn nein, schneiden sich die beiden ?

◦

Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume.

Zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ in einem Vektorraum gibt es nach Eigenschaft (E1) in §1 genau eine Verbindungsgerade, die wir mit $a^{(1)} \vee a^{(2)}$ bezeichnet haben. Für affine Unterräume gilt nun:

4.11 Satz.

Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen.
Eine Teilmenge M eines K -Vektorraumes V ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $a^{(1)}, a^{(2)}$ auch deren Verbindungsgerade $a^{(1)} \vee a^{(2)}$ vollständig in M liegt.

◦

Falls $K = \mathbb{Z}_2$, lässt sich leicht ein Gegenbeispiel angeben in Gestalt der Teilmenge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ von \mathbb{Z}_2^2 .

„Normalen“-Formen affiner Unterräume.

Sei zunächst K noch ein beliebiger Körper. Wie bereits im Beispiel 4.8 (a) erwähnt, gilt mit einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ und mit $b \in K^m$ die Beziehung

$$\text{Lös}(A, b) = (\text{SR}({}^t A))^{\perp}.$$

Dabei ist für eine nicht leere Teilmenge $M \subseteq K^n$

$$M^{\perp} = \{w \in K^n : {}^t u \cdot w = 0 \text{ für alle } u \in M\}.$$

.....

⁽⁵⁾ZR bedeutet: Zeilenraum.

Man rechnet leicht nach, dass M^\perp stets ein Untervektorraum ist. Ist U ein Untervektorraum, etwa $U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$, dann ist $U^\perp = \text{L\"os}(A, 0)$ mit $A = \begin{bmatrix} \mathfrak{t}u^{(1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{t}u^{(r)} \end{bmatrix}$ und $\dim_K U^\perp = n - \dim_K U$

(Siehe Satz 4.5 (b)). Wenn nun K ein Unterkörper der reellen Zahlen ist, dann lässt sich leicht nachrechnen, dass für einen Untervektorraum U von K^n stets $U \cap U^\perp = \{0\}$ zutrifft (vgl. Bemerkung in Beispiel 4.8(a)) und dann ist aus Dimensionsgründen $U + U^\perp = K^n$. Einen Normalenvektor für einen affinen Unterraum im vertrauten Sinne kann man daher finden, wenn $\dim_K U^\perp = 1$.

4.12 Satz.

Sei $\Gamma = a + U$ affiner Unterraum mit $a \in K^n$ und mit einem Untervektorraum U von K^n .

Γ sei eine Hyperebene, also $\dim_K \Gamma = n - 1$ und $\dim_K U^\perp = 1$

- (a) Wenn $U + U^\perp = K^n$ und folglich $U \cap U^\perp = \{0\}$, dann hat Γ eine *Normalendarstellung* oder *Normalenform* wie folgt

$$\Gamma = u^* + (u^*)^\perp \quad \text{mit } u^* \in U^\perp, \text{ falls } 0 \notin \Gamma.$$

u^* ist dabei durch Γ eindeutig bestimmt.

Wenn Γ durch 0 geht, dann ist $\Gamma = (u^*)^\perp$ mit $u^* \in U^\perp$. Zwangsläufig ist in beiden Fällen $u^* \neq 0$.

Ist insbesondere $U = \text{L\"os}(\mathfrak{t}v, b)$ mit $v \in K^n$ und $a' \in \Gamma$, dann ist $\Gamma = a' + v^\perp$. Beachte, dass dabei nicht unbedingt $v \in \Gamma$ sein muss.

- (b) Wenn K ein Unterkörper der reellen Zahlen ist (z.B. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ selbst oder $K = \mathbb{A}$, dem Körper der algebraischen Zahlen), dann ist stets $U + U^\perp = K^n$.⁽¹³⁾

◦

4.13 Beispiel.

- (a) Hyperebene in \mathbb{R}^4 : Sei $\Gamma = \text{L\"os}(\mathfrak{t}v, 1)$ mit $\mathfrak{t}v = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Dann ist $\Gamma = e^{(1)} + v^\perp$ und $v \notin \Gamma$. Allerdings ist $\frac{1}{4}v \in \Gamma$. Ausgehend von der Parameterdarstellung

$$\Gamma = e^{(1)} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

erhält man $U^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ und dann entsprechend $u^* = \frac{1}{4}v$ und $\Gamma = u^* + (u^*)^\perp$.

- (b) Hat Γ auch eine Normalendarstellung, über $K = \mathbb{Z}_2$? Alle Anfangsdaten lassen sich jedenfalls auch über \mathbb{Z}_2 interpretieren. Wie sieht es über \mathbb{Z}_3 aus?
- (c) Fortsetzung von Beispiel/Bemerkung 4.8 (d): Ein linearer Code C heißt selbstorthogonal, wenn $C \subseteq C^\perp$ und selbstdual, wenn $C = C^\perp$. Ein relevantes Beispiel eines selbstdualen

Codes in \mathbb{Z}_2^8 erhält man, wenn man die um die Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ erweiterte Matrix G aus Beispiel

4.8 (d) als Erzeugermatrix benutzt. Selbstduale Codes sind leichter zu dekodieren.

◦

.....

⁽¹³⁾Wenn für zwei Untervektorräume U, W von V gilt: $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$, dann wird dies häufig durch die Schreibweise $U \oplus W = V$ zum Ausdruck gebracht.

Affin-lineare Beschreibung affiner Unterräume.

Die folgende weitere Beschreibungsart für affine Unterräume leitet, wie Sie bald sehen werden, methodisch bereits zum nächsten Abschnitt über.

4.14 Definition.

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^m \lambda_i v^{(i)}$ von Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ aus einem K -Vektorraum V mit Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aus K heißt *affine Kombination* oder *Affinkombination*, wenn

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 .$$

◦

4.15 Beispiel.

Affinkombinationen von Punkten aus einem affinen Unterraum treten auf natürliche Weise schon bei Geraden auf, denn ein Punkt p liegt genau dann auf der Geraden $a + Ku$, wenn

$$p = (1 - \lambda)a + \lambda(a + u) = a + \lambda u \quad \text{mit einem } \lambda \text{ aus } K .$$

◦

Ganz analog dazu, dass ein Untervektorraum als nicht leere Teilmenge M eines endlichdimensionalen Vektorraumes dadurch charakterisiert ist, dass er mit je endlich vielen Vektoren auch alle deren Linearkombinationen enthält, oder dadurch, dass er endlich viele Vektoren enthält, derart, dass die Menge aller ihrer Linearkombinationen gerade M ergibt, gilt für affine Unterräume (die leer sein dürfen):

4.16 Satz.

Für eine Teilmenge M des endlichdimensionalen K -Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) M ist ein affiner Unterraum.
- (b) Mit je endlich vielen Vektoren aus M liegen auch alle deren Affinkombinationen in M .
- (c) Es gibt endliche viele Vektoren in M derart, dass M die Menge aller ihrer Affinkombinationen ist.

◦

Man kann Satz 4.16 als Erweiterung von Satz 4.11 ansehen.

4.17 Beispiel.

Sei E eine Ebene, etwa $E = a + U$ mit einem zweidimensionalen Untervektorraum U mit einer Basis $u^{(1)}, u^{(2)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} E &= \{a + \mu u^{(1)} + \nu u^{(2)} : \mu, \nu \in K\} \\ &= \{(1 - \mu - \nu)a + \mu(a + u^{(1)}) + \nu(a + u^{(2)}) : \mu, \nu \in K\} \\ &= \{\lambda a + \mu(a + u^{(1)}) + \nu(a + u^{(2)}) : \lambda, \mu, \nu \in K, \lambda + \mu + \nu = 1\} . \end{aligned}$$

◦

Wir haben inzwischen bereits fünf Beschreibungsarten affiner Unterräume kennengelernt:

- Parameterdarstellungen,
- Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme,
- Mengen die bezüglich Verbindungsgeraden abgeschlossen sind,
- Normalenformen,
- Mengen die hinsichtlich affiner Kombinationen abgeschlossen sind.

§ 5 Schnitt, Verbindung und Erzeugung affiner Unterräume

Wann liegt ein Punkt auf einem affinen Unterraum?

Wann haben zwei affine Unterräume eine Punkt gemeinsam?

Wie bestimme ich gemeinsame Punkten von affinen Unterräumen?

Was ergibt das Verbinden je zweier Punkte aus zwei verschiedenen Geraden?

Was ist die richtige Verallgemeinerung des Begriffes „Verbindungsgerade“ zweier verschiedener Punkte für beliebige affine Unterräume?

Wie viele Punkte brauche ich mindestens, um einen affinen Unterraum durch Affinkombinationen zu erzeugen?

5.1 Beobachtung.

Gegeben sind ein Punkt p und ein affiner Unterraum Γ in K^n . Liegt p auf Γ ?

(a) Wenn Γ in der Form $\Gamma = a + \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K$ gegeben ist, dann liegt p genau dann in Γ , wenn $\text{Lös}([u^{(1)}, \dots, u^{(r)}], p - a)$ nicht leer ist.

(b) Wenn Γ in der Form $\Gamma = \text{Lös}(A, b)$ gegeben ist, dann liegt p auf Γ genau dann, wenn $Ap = b$. ◦

5.2 Satz.

Seien Γ, Δ affine Unterräume von K^n .

(a) Seien $\Gamma = a + U, \Delta = b + W$ mit a, b aus K und Untervektorräumen U, W von K^n .

(i) $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset \Leftrightarrow b - a \in U + W$

(ii) Wenn $U = \langle u^{(1)}, \dots, u^{(r)} \rangle_K, W = \langle w^{(1)}, \dots, w^{(s)} \rangle_K, M_U = [u^{(1)}, \dots, u^{(r)}]$ und $M_W = [w^{(1)}, \dots, w^{(s)}]$, dann gilt

$$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Lös}([M_U, -M_W], b - a) \neq \emptyset$$

und wenn $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma \cap \Delta &= a + M_U \cdot [E_r \mid 0] \cdot \text{Lös}([M_U, -M_W], b - a) \\ &= b + M_W \cdot [0 \mid E_s] \cdot \text{Lös}([M_U, -M_W], b - a) \end{aligned}$$

(b) Wenn $\Gamma = \text{Lös}(A, b), \Delta = \text{Lös}(B, c)$ mit $A \in K^{l \times n}, B \in K^{m \times n}, b \in K^l, c \in K^m$, dann ist einfach

$$\Gamma \cap \Delta = \text{Lös}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}\right).$$

5.3 Beispiele

5.4 Satz.

Seien Γ, Δ affine Unterräume eines K -Vektorraums, etwa wie eben $\Gamma = a + U, \Delta = b + W$. Ferner sei

$$M_{\Gamma, \Delta} := \bigcup_{\substack{a \in \Gamma \\ b \in \Delta}} (a \vee b).$$

Genau dann ist $M_{\Gamma, \Delta}$ ein affiner Unterraum, wenn $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ oder wenn $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ und zugleich $U = W$. ◦

Das ziehen von Verbindungsgeraden reicht nach diesem Ergebnis also nicht immer aus, um einen möglichst kleinen affinen Unterraum zu konstruieren, der zwei gegebene affine Unterräume

enthält. Die affin-lineare Darstellung affiner Unterräume führt uns zur „richtigen“ Verallgemeinerung des Begriffs „Verbindungsgeraden“.

Verbindungsräume

5.5 Definition.

Sei M eine Teilmenge von V .

$$\begin{aligned}\overline{M}^{\text{aff}} &:= \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i v^{(i)} : r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v^{(i)} \in M, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1 \right\} \\ &= \{ \text{Affinkombinationen von Punkten aus } M \}\end{aligned}$$

heißt *affine Hülle von M* oder *affines Erzeugnis von M* . Man sagt auch: die Punkte aus M erzeugen $\overline{M}^{\text{aff}}$ *affin*. ◦

Die wichtigsten Eigenschaften von affinen Hüllen sind völlig analog zu denen linearer Hüllen:

5.6 Satz.

- (a) $\overline{M}^{\text{aff}}$ ist affiner Unterraum und $M \subseteq \overline{M}^{\text{aff}}$.
- (b) $\overline{\overline{M}^{\text{aff}}}^{\text{aff}} = \overline{M}^{\text{aff}}$.
- (c) Jeder affine Unterraum, der M enthält, enthält $\overline{M}^{\text{aff}}$. M.a.W.:

$$\overline{M}^{\text{aff}} = \bigcap_{\substack{\Delta \text{ aUR} \\ M \subseteq \Delta}} \Delta$$

- (d) $M \subseteq M' \subseteq V \Rightarrow \overline{M}^{\text{aff}} \subseteq \overline{M'}^{\text{aff}}$ ◦

Damit können wir ganz einfach Verbindungsräume erklären:

5.7 Definition.

- (a) Seien Γ, Δ affine Unterräume von V und $\Gamma \vee \Delta := \overline{\Gamma \cup \Delta}^{\text{aff}}$.
 $\Gamma \vee \Delta$ heißt *Verbindungsraum von Γ und Δ* .

- (b) Seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ affine Unterräume von V und sei $\bigvee_{i=1}^r \Gamma_i := \overline{\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r}^{\text{aff}}$.

$\bigvee_{i=1}^r \Gamma_i$ heißt *Verbindungsraum der affinen Unterräume $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$* .

- (c) Sonderfall von (b): Wenn $\Gamma_i = \{p^{(i)}\}, 1 \leq i \leq r$ dann schreiben wir $p^{(1)} \vee \dots \vee p^{(r)}$ statt $\{p^{(1)}\} \vee \dots \vee \{p^{(r)}\}$. ◦

5.8 Regel.

Seien $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ affine Unterräume von V .

- (a) $\Gamma \vee \Delta = \Delta \vee \Gamma$

- (b) $(\dots (\Gamma_1 \vee \Gamma_2) \vee \dots \vee \Gamma_{r-1}) \vee \Gamma_r = \bigvee_{i=1}^r \Gamma_i$, ebenso für jede andere Klammerung der Γ_i .
(Assoziativgesetz für \vee) ◦

Explizite Darstellung für „ $\Gamma \vee \Delta$ “ in Parameterform:

5.9 Beobachtung.

Seien Γ, Δ affine Unterräume in V , beide nicht leer mit Richtungen U, W und seien a aus Γ und b aus Δ . Dann gilt

$$\Gamma \vee \Delta = a + (U + W + K(b - a)) = b + (U + W + K(a - b)) .$$

◦

5.10 Beispiel.

(a) $\overline{\emptyset}^{\text{aff}} = \emptyset$ und $\overline{\{p\}}^{\text{aff}} = \{p\}$ „ $=$ “ p .

(b) Für zwei verschiedene Punkte p, q in V ist die Bedeutung von $p \vee q$ nach Definition 5.7 (a) kompatibel mit der Bedeutung aus §1.

(c) Seien $p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}$ aus V , dann ist

$$\begin{aligned} p^{(0)} \vee p^{(1)} \vee p^{(2)} &= (p^{(0)} \vee p^{(1)}) \vee p^{(2)} && \stackrel{\text{Beob. 5.9}}{=} && (p^{(0)} + K(p^{(1)} - p^{(0)})) \vee (p^{(2)} + \{0\}) \\ &&& \stackrel{\text{Beob. 5.9}}{=} && p^{(0)} + (K(p^{(1)} - p^{(0)}) + \{0\} + K(p^{(2)} - p^{(0)})) \\ &&& = && p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, p^{(2)} - p^{(0)} \rangle_K . \end{aligned}$$

(d) Seien $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus V , $r \geq 1$. Durch Induktion erhält man:

$$p^{(0)} \vee \dots \vee p^{(r)} = p^{(0)} + \langle p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)} \rangle_K .$$

(e) Seien a, b, c, d aus V und gelte $a \neq b, c \neq d$.

(i) Seien $\Gamma = a \vee b, \Delta = c \vee d$, dann ist

$$\Gamma \vee \Delta = (a \vee b) \vee (c \vee d) = a \vee b \vee c \vee d \stackrel{\text{Beisp. (d)}}{=} a + \underbrace{\langle b - a, c - a, d - a \rangle_K}_{=: U} .$$

Die Dimension hängt von der Lage der vier Punkte ab. Liegen sie nicht in einer Ebene, dann ist $\dim_K U = 3$. Vergleichen Sie mit Aufgabe (6) und Satz 5.4.

(ii) Wenn $\Gamma = a + Kv, v \neq 0, \Delta = b + Kw, w \neq 0$, dann ist nach Beobachtung 5.9

$$\Gamma \vee \Delta = a + \langle v, w, b - a \rangle_K .$$

◦

Affine Erzeugung

5.11 Definition.

(a) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affines Erzeugendensystem* von Γ , wenn $\overline{M}^{\text{aff}} = \Gamma$.

(b) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affine Basis* von Γ , wenn $\overline{M}^{\text{aff}} = \Gamma$ und dies für keine echte Teilmenge von M gilt.

(c) Eine Teilmenge M eines affinen Unterraums Γ heißt *affin unabhängig*, wenn M eine affine Basis von $\overline{M}^{\text{aff}}$ ist und *affin abhängig*, wenn sie nicht affin unabhängig ist.

◦

Bei uns ist in der Regel M eine endliche Menge, $M = \{p^{(0)}, \dots, p^{(r)}\}$. Wir lassen dann Mengenklammern weg und sagen z.B. „ $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ ist eine affine Basis“ statt „ $\{p^{(0)}, \dots, p^{(r)}\}$ ist eine affine Basis“. Auf Grund unserer Definitionen kommt es dabei auf die Reihenfolge der

$p^{(i)}$ nicht an.

Beachten Sie die durchgehende Analogie zu Begriffen aus der linearen Algebra:

Linearkombination	\leftrightarrow	Affinkombination
lineare Hülle/lineares Erzeugnis/Aufspann	\leftrightarrow	affine Hülle
Erzeugendensystem	\leftrightarrow	affines Erzeugendensystem
linear unabhängig	\leftrightarrow	affin unabhängig
Basis	\leftrightarrow	affine Basis

Es fehlen uns noch Informationen zur Basislänge/Dimension und zu Koordinaten.

5.12 Satz.

- (a) Seien $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus V . Äquivalent sind
- (i) $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ sind affin unabhängig/affin abhängig
 - (ii) $p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)}$ sind linear unabhängig/ linear abhängig
- (b) Seien Γ ein affiner Unterraum von V mit Richtung U und $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ aus Γ . Äquivalent sind
- (i) $p^{(0)}, \dots, p^{(r)}$ ist ein affines Erzeugendensystem/eine affine Basis von Γ
 - (ii) $p^{(1)} - p^{(0)}, \dots, p^{(r)} - p^{(0)}$ ist ein Erzeugendensystem/eine Basis der Richtung U von Γ .

◦

Beachte: Wenn Γ nicht leer ist, dann ist auf Grund von (b) die *Länge einer affinen Basis von Γ stets um eins größer als die Länge einer Basis der Richtung von Γ* , bzw. als die Dimension von Γ .

5.13 Beispiel.

- (a) Randfälle: Wenn Γ leer ist, dann sind die Aussagen in Satz 5.12 gegenstandslos. Wenn $\Gamma = \{p\}$, $p \in V$, dann ist p affine Basis von Γ und \emptyset ist Basis der Richtung $\{0\}$ von Γ .
- (b) Seien a, b, c drei nicht kollineare Punkte in V (Eckpunkte eines nicht ausgearteten Dreiecks). Dann gilt

$$a \notin b \vee c, \quad b \notin c \vee a, \quad c \notin a \vee b$$

und a, b, c ist eine affine Basis von $a \vee b \vee c$. Nach Beispiel 5.10 (c),(d) ist

$$\overline{\{a, b, c\}}^{\text{aff}} = a \vee b \vee c = a + \langle b - a, c - a \rangle_K,$$

wobei hier $b - a, c - a$ linear unabhängig sind. Drei affin unabhängige Punkte erzeugen affin eine Ebene.

- (c) Seien a, b, c, d vier nicht komplanare Punkte in V (Eckpunkte eines nicht ausgearteten Tetraeders).

Keiner der vier Punkte darf demnach im affinen Erzeugnis der übrigen drei liegen. Nach Beispiel 5.10 (e)(i) ist

$$\overline{\{a, b, c, d\}}^{\text{aff}} = a \vee b \vee c \vee d = a + \langle b - a, c - a, d - a \rangle_K.$$

Wir erwarten natürlich, dass die Dimension 3 sein wird. Wären die Vektoren $b - a, c - a, d - a$ linear abhängig, dann würde mit gewissen α, β, γ aus K , nicht alle 0, gelten:

$$\alpha(b - a) + \beta(c - a) + \gamma(d - a) = 0.$$

Wäre dabei z.B. $\alpha \neq 0$, dann würde folgen $b - a = -\frac{\beta}{\alpha}(c - a) - \frac{\gamma}{\alpha}(d - a)$ und dann $b = (1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha})a + (-\frac{\beta}{\alpha})c + (-\frac{\gamma}{\alpha})d$. Letzteres ist eine Affinkombination und somit liegt b in $a \vee c \vee d$ im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Gleiches ergibt sich, falls etwa β

oder γ von 0 verschieden sind. Die Dimension ist also tatsächlich 3. Vier affin unabhängige Punkte erzeugen einen dreidimensionalen affinen Unterraum. ◦

Das Ergebnis in Beispiel 5.13 (c) lässt sich leicht verallgemeinern:

5.14 Beobachtung.

Seien $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ aus V , dann sind $a^{(1)} - a^{(0)}, \dots, a^{(r)} - a^{(0)}$ genau dann linear abhängig, bzw. $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ genau dann affin abhängig, wenn

$$a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^r a^{(i)} \quad \text{mit einem } j \text{ aus } \{0, \dots, r\}.$$

◦

Affine Koordinaten

Grundlage für die Einführung affiner Koordinaten ist die folgende

5.15 Beobachtung.

Seien $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ affin unabhängige Punkte in V und $\lambda_0, \dots, \lambda_r, \mu_0, \dots, \mu_r$ aus K derart, dass $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^r \mu_i$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i a^{(i)} = \sum_{i=0}^r \mu_i a^{(i)} \Rightarrow \lambda_0 = \mu_0, \dots, \lambda_r = \mu_r$$

◦

Eine Darstellung $p = \sum_{i=0}^r \lambda_i a^{(i)}$ für einen Punkt p mit affin unabhängigen Punkten $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ ist eindeutig und die Koeffizienten $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ heißen *affine oder auch baryzentrische Koordinaten des Punktes p* . Im Falle $r = 2$ werden sie manchmal *Dreieckskoordinaten* und im Falle $r = 3$ *Tetraederkoordinaten* genannt.

Bemerkung zur Schreibweise: In der allgemeineren/abstrakteren affinen Geometrie wird unterschieden zwischen dem zu Grunde liegenden Vektorraum V , in dem die Richtungsvektoren liegen, und einer zugeordneten Menge X , in der die Punkte liegen. Zu zwei Punkten p, q aus X muss dann ein Richtungsvektor zugewiesen werden, für den häufig \vec{pq} geschrieben wird. Bei uns sind X und V identisch und dann üblicherweise $\vec{pq} = q - p$, weswegen sich die Pfeilschreibweise eigentlich erübrigt. Sie ist u.U. dann zweckmäßig, wenn man die Vorstellung einer Verschiebung/Translation erwecken möchte, ohne mit einem Abbildungsbegriff hantieren zu wollen oder, bedingt durch den Kontext, zu können. Insbesondere bei der Einführung von affinen Koordinaten haben wir es bei unserem Vorgehen etwas leichter, da wir Beobachtung 5.14 direkt für Punkte angeben können, für die in der allgemeinen affinen Geometrie ja keine affinen Kombinationen erklärt sind.

5.16 Beispiele

- (a) Die affine Hülle $\overline{\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}}^{\text{aff}}$ der Standardbasisvektoren; Strecke, Dreieck, Tetraeder, Simplex für $n = 2, 3, \dots$
- (b) Affine Koordinaten des Schwerpunktes affin unabhängiger Punkte, Dreieckskoordinaten, [KK] für mehr Details.

◦

5.17 Definition.

Für eine Teilmenge M eines K -Vektorraumes V sei $\dim_K M := \dim_K \overline{M}^{\text{aff}}$. Insbesondere ist dann $\dim_K \{a^{(1)}, \dots, a^{(r)}\} = r - 1$ für affin unabhängige Punkte $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$. ◦

5.18 Beispiel. Punkte auf Kurven.

U.A. die Momentenkurve und ihre Schnitte mit affinen Unterräumen. ◦

5.19 Beobachtung. Dimensionsformel für affine Unterräume.

Seien Γ, Δ affine Unterräume in einem endlichdimensionalen K - Vektorraum mit Richtungen U und W . Dann gilt

$$\begin{aligned}\dim_K(\Gamma \vee \Delta) &= \dim_K \Gamma + \dim_K \Delta - \dim_K(\Gamma \cap \Delta) \quad \text{falls } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset \\ &= \dim_K \Gamma + \dim_K \Delta - \dim_K(U \cap W) + 1 \quad \text{falls } \Gamma \cap \Delta = \emptyset\end{aligned}$$

◦

Literatur zu §5: [A],[F],[L], siehe Internetseite der Vorlesung.

§ 6 Affine Abbildungen

Bei der Definition affiner Abbildungen gehen wir von der linearen Algebra aus und kommen aus guten Gründen erst danach zum „geometrischen“ Pendant und dem so genannten Hauptsatz der affinen Geometrie, den wir allerdings nicht beweisen werden. Es folgen wie immer erste analytische Eigenschaften und dann etliche Beispiele. Schließlich schauen wir uns affine Abbildungen bei Dimension 2 und 3 genauer an.

6.1 Definition.

Seien Γ, Γ' affine Unterräume der K -Vektorräume V, V' mit Richtungen U, U' und sei a aus Γ . Eine Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ heiße *affin*, wenn es eine lineare Abbildung $\ell : U \rightarrow U'$ gibt derart, dass mit einem a aus Γ für alle p aus Γ gilt

$$f(p) = f(a) + \ell(p - a) .$$

◦

Meistens wird $V = V' = K^n$ sein und $K = \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ sein, oft auch $\Gamma = V = \Gamma'$. Die Definition sieht auf den ersten Blick etwas kompliziert aus. Man bedenke aber, dass affine Abbildungen zwischen affinen Unterräumen und nicht nur zwischen Vektorräumen definiert werden sollen.

6.2 Beobachtung.

Sei f eine affine Abbildung (Bezeichnungen wie in Definition 6.1).

(a) Definition 6.1. ist unabhängig von der Wahl von a aus Γ , denn es gilt für alle b, p aus Γ

$$f(p) = f(b) + \ell(p - b) .$$

(b) Die lineare Abbildung ℓ ist durch f eindeutig bestimmt und heißt *zu f gehörig*.

Schreibweise: ℓ_f .

(c) Für je endlich viele Punkte $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ aus Γ und $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ aus K mit $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i a^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(a^{(i)}) . \quad (4)$$

Man sagt dafür auch: „ f ist mit *Affinkombinationen verträglich*.“

Wenn f injektiv ist, dann bedeutet dies insbesondere, dass f Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen, etc. abbildet. (Siehe auch weiter unten Satz 6.12).

Beachten Sie auch die Analogie zu linearen Abbildungen!

(d) Für alle b aus Γ ist $f(\Gamma) = f(b) + \ell(U)$.

◦

6.3 Definition.

Eine bijektive affine Abbildung heißt *Affinität*.

◦

Bei affinen Unterräumen war, außer wenn $K \cong \mathbb{Z}_2$, die Abgeschlossenheit bezüglich Verbindungsgeraden eine geometrische Charakterisierung (Satz 4.11). Bei affinen Abbildungen ist es die Wirkung auf Geraden, die ebenfalls eine geometrische Charakterisierung erlaubt. Allerdings ist hier der Zusammenhang mit unserer analytischen Definition wesentlich komplizierter. Das wichtige Ergebnis hierzu ist der folgende so genannte *Hauptsatz der affinen Geometrie*.

6.4 Satz.

Seien $|K| \geq 3$, $\dim_K V \geq 2$, Γ, Δ affine Unterräume und $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ eine affine Abbildung. quivalent sind

(i) f bildet Geraden in Geraden ab (f ist Kollineation).

(ii) f ist bis auf einen Automorphismus⁽¹⁴⁾ von K eine Affinität im Sinne der Definitionen 6.3 und 6.1. ◦

Für die Richtung „ \Leftarrow “ des Beweises können wir auf Beobachtung 6.2 (c) verweisen. Für die andere Richtung wird z.B. auf [F], S.35 oder [A], p. 41 verwiesen.

Nur über Körpern, die nur die Identität als Automorphismus zulassen, sind Kollineationen genau die Affinitäten. Es ist interessant, festzustellen, dass dadurch den rationalen und den reellen Zahlen eine Sonderrolle zukommt:

6.5 Folgerung

Wenn $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$, dann lautet der Hauptsatz so:

$$f \text{ Kollineation} \iff f \text{ Affinität}$$

◦

Zum Beweis muss man nachrechnen, dass \mathbb{Q} und \mathbb{R} keine nicht trivialen Automorphismen besitzen. Dies sind zwei Algebra-Übungsaufgaben.

◇ ◇ ◇

Vor den Beispielen zu affinen Abbildungen noch eine weitere grundlegende Eigenschaft affiner Abbildungen:

6.6 Beobachtung.

Sei $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ eine affine Abbildung und sei $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Γ . Dann ist f durch die Bilder der affinen Basispunkte vollständig festgelegt. Insbesondere ist f die identische Abbildung, wenn f die affinen Basispunkte festlässt. ◦

Beachten Sie auch hier die Analogie zu linearen Abbildungen!

6.7 Beispiele

- (a) Lineare Abbildungen sind affin.
- (b) Mit jeder linearen Abbildung kann man affine Abbildungen konstruieren.
- (c) Translationen
- (d) Alle affinen Abbildungen ergeben sich als Hintereinanderausführungen von Translationen und linearen Abbildungen
- (e) Hintereinanderausführungen affiner Abbildungen
- (f) Einschränkungen affiner Abbildungen auf affine Unterräume des Definitionsraumes ◦

Merke: In Teil (d) der Beispiele ergibt sich u.A. die Darstellung einer affinen Abbildung in der Form

$$f = T_{f(a)} \circ \ell_f \circ T_{-a} \quad \text{oder auch} \quad f = T_{f(a) + \ell_f(-a)} \circ \ell_f.$$

6.8 Beispiel.: Streckungen.

Als Motivation zunächst: Streckung in einer Ebene im \mathbb{R}^3 die den Nullpunkt nicht enthält.

Für die allgemeine Definition seien mit den bisherigen Bezeichnungen $\Gamma = \Gamma', \alpha$ aus K, b aus Γ

⁽¹⁴⁾Damit ist gemeint: es gibt einen Automorphismus σ von K derart, dass an Stelle von (4) folgendes gilt: $f(\sum_{i=0}^r \lambda_i a^{(i)}) = \sum_{i=0}^r \sigma(\lambda_i) f(a^{(i)})$. Beachte, dass automatisch $\sum_{i=0}^r \sigma(\lambda_i) = 1$.

und $\ell = \alpha \cdot \text{id}_U$. Dann heißt die affine Abbildung

$$f : \Gamma \rightarrow \Gamma \quad \text{mit} \quad f(p) = \underbrace{b}_{=f(a)} + \underbrace{\ell(p-a)}_{=\alpha(p-a)} \quad \text{für} \quad a, p \text{ in } \Gamma$$

Streckung oder auch *Dilatation*. Sie heißt *echt*, wenn $\alpha \neq 0$.

Eigenschaften:

Wenn $\alpha \neq 0$, dann ist f eine Affinität.

Wenn $\alpha \neq 0, 1$, dann hat f genau einen Fixpunkt, das so genannte Zentrum der Streckung.

Wie dieser Fixpunkt bestimmt werden kann, lernen Sie in der Aufgabe (14) (b).

Wenn $\alpha = 1$, liegt die identische Abbildung vor.

Sei nun $\alpha \neq 0, 1$ und p^* der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f , dann ist es zweckmäßig die Abbildungsvorschrift von f auf diesen Fixpunkt zu beziehen. Nach Beobachtung 6.2 (a) ist dann nämlich

$$f(p) = f(p^*) + \ell(p - p^*) = p^* + \alpha(p - p^*) = (1 - \alpha)p^* + \alpha p \quad \text{für alle } p \text{ aus } \Gamma .$$

Für weitere Eigenschaften von Streckungen wird auf die Aufgabe (14) verwiesen. ◦

6.9 Beispiel.: Parallelprojektionen.

In der Vorlesung: Beispiele von Parallelprojektionen in \mathbb{R}^3 .

Für die allgemeine Definition seien mit den bisherigen Bezeichnungen $V = V' = U_1 \oplus U_2$ und dann $\ell : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung mit der Vorschrift $\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)}$ für $u^{(1)}$ aus U_1 , $u^{(2)}$ aus U_2 . ℓ ist die (lineare) Projektion von V auf U_1 entlang U_2 . Sei nun Γ ein affiner Unterraum von V und $\Gamma' = a + U_1$ mit (o.E.!) a aus U_2 .

Dann ist $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ mit $f(p) = a + \ell(p)$ für p aus Γ die (affine) (*Parallel-*)*Projektion von Γ nach Γ' entlang U_2* . Offensichtlich ist $f = T_a \circ \ell|_{\Gamma}$. ◦

6.10 Beispiel.: Spiegelungen.

In der Vorlesung: Beispiel einer (Schräg-)Spiegelung in einer Ebene in \mathbb{R}^3 , die den Nullpunkt nicht enthält. Es folgt die allgemeine Definition.

(a) Spiegelung in Richtung eines Untervektorraumes.

Für die allgemeine Definition seien $\Gamma = \Gamma' = a + U$, $U = U_1 \oplus U_2$ und $\ell : V \rightarrow V'$ mit der Vorschrift $\ell(u^{(1)} + u^{(2)}) = u^{(1)} - u^{(2)}$ für $u^{(1)}$ aus U_1 , $u^{(2)}$ aus U_2 .

Die *Spiegelung f in Γ an $a + U_1$ in Richtung U_2* ist dann erklärt durch die Vorschrift $f(p) = a + \ell(p - a)$ für p aus Γ .

(b) Gleitspiegelung.

Sei f eine Spiegelung gemäß (a). Sei zusätzlich noch w aus U gegeben, dann heißt die Abbildung g mit $g = T_w \circ f$ *Gleitspiegelung (in Γ)*. ◦

6.11 Beispiel.

Ein Beispiel zur Veränderung des Abbildungstyps bei Einschränkung auf einen Unterraum ist Gegenstand der Aufgabe (12). ◦

Zur **Konstruktion affiner Abbildungen** stehen uns inzwischen folgende Methoden zur Verfügung:

- Vorgabe einer linearen Abbildung ℓ und von Verschiebungen T_{-a}, T_b um dann f festzusetzen als $f = T_b \circ \ell \circ T_{-a}$. Die Abbildungsvorschrift lautet dann: $f(x) = b + \ell(x - a)$ für x aus einem geeigneten Definitionsbereich. $x - a$ muss dabei im Definitionsbereich von ℓ liegen.

- Geometrisch motivierte Abbildungsvorschrift und Nachweis der Eigenschaft „affin“. Ein Beispiel wird in Aufgabe (13) behandelt.
- Vorgabe von Bildpunkten für die Punkte einer affinen Basis des Definitionsraumes.

Zu Letzterem eine Umkehrung von Beobachtung 6.6:

6.12 Satz.

Bezeichnungen wie in Definition 6.1.

Sei $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Γ und seien $b^{(0)}, \dots, b^{(r)}$ aus Γ' . Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ derart, dass $f(a^{(i)}) = b^{(i)}$ für $0 \leq i \leq r$, und diese ist genau dann

surjektiv, wenn $\Gamma' = b^{(0)} \vee \dots \vee b^{(r)}$.

injektiv, wenn $b^{(0)}, \dots, b^{(r)}$ affin unabhängig sind.

bijektiv, wenn $b^{(0)}, \dots, b^{(r)}$ eine affine Basis von Γ' ist.

◦

Fortsetzung affiner Abbildungen auf den umgebenden Vektorraum.

In der Darstellung $f = T_{f(a)} \circ \ell_f \circ T_{-a}$ sind die Translationen von alleine auf dem ganzen Raum definiert und auf einem Untervektorraum erklärte lineare Abbildungen lassen sich stets fortsetzen, wenn auch i.A. auf viele Arten.

Affine Abbildungen und Matrizen.

6.13 Beobachtung.

Mit den Bezeichnungen von Definition 6.1 seien $V = K^n = \Gamma, V' = K^m = \Gamma'$ und $f : V \rightarrow V'$ eine Abbildung.

Dann ist f genau dann affin, wenn es eine Matrix A in $K^{m \times n}$ und einen Vektor b in K^m gibt derart, dass $f(x) = Ax + b$ für alle x aus K^n . ◦

Alles, was Sie über Matrixdarstellungen linearer Abbildungen in der linearen Algebra gelernt haben, hat eine analytisch-geometrische Bedeutung für affine Abbildungen und kann entsprechend genutzt werden: Basiswechsel, Eigenwerte, Normalformen, etc.

Vergleich affiner Abbildungen und Fixräume.

6.14 Beobachtung.

Seien $f, g : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ affine Abbildungen und sei $M_{f=g} = \{p \in \Gamma : f(p) = g(p)\}$. Dann ist $M_{f=g}$ ein affiner Unterraum. ◦

6.15 Beispiele

Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ eine affine Abbildung.

(a) Für alle y aus V' ist $f^{-1}(y)$ ein affiner Unterraum und für alle $y^{(1)}, y^{(2)}$ aus $f(\Gamma)$ haben $f^{-1}(y^{(1)})$ und $f^{-1}(y^{(2)})$ die gleiche Richtung.

(b) Sei $\Gamma = \Gamma' = V$. Sei $\text{Fix}_f = \{p \in V : f(p) = p\}$. Fix_f ist ein affiner Unterraum.

Ist p^* ein Fixpunkt von f , dann ist (vgl. Beispiel 6.8)

$$f(p) = p^* + \ell_f(p - p^*) \quad \text{für } p \text{ aus } \Gamma.$$

Wann gibt es es Fixpunkte?

Im Falle $\Gamma = V = \Gamma'$ genau dann, wenn die Gleichung

$$0 = f(x) - x = f(a) + \ell_f(x - a) - x = (\ell_f - id_v)(x) - (\ell_f(a) - f(a))$$

mindestens eine Lösung p^* für x besitzt.

Dies ist z.B. der Fall, wenn f selbst schon linear ist mit $p^* = 0$.

Außerdem, wenn 1 kein Eigenwert von ℓ_f ist. Dann ist nämlich $(\ell_f - id_v)$ invertierbar und dann hat die Gleichung sogar eine eindeutige Lösung, f also genau einen Fixpunkt, bzw. Fix_f ist in diesem Fall ein Punkt.

(c) Fixpunkte von Parallelprojektionen

(d) Fixpunkte von Spiegelungen und Gleitspiegelungen

◦

Zur Klassifikation affiner Abbildungen insbesondere in \mathbb{R}^2 :

Es wird gezeigt, wie es geht. Aber nicht alle Details werden ausgeführt.

Die Einteilung oder Klassifikation affiner Abbildungen in Typen beruht auf folgendem Äquivalenzbegriff. Die affinen Abbildungen werden dadurch in Klassen eingeteilt, innerhalb derer dann nach schönen, einfach und transparent gebauten Vertretern gesucht wird. Alle weiteren affinen Abbildungen in derselben Klasse erben dann solche geometrische Eigenschaften von dem Vertreter, die unter Affinitäten erhalten bleiben.

6.16 Definition.

Zwei affine Abbildungen $f : \Gamma \rightarrow \Gamma, g : \Delta \rightarrow \Delta$ heißen (*affin*) *äquivalent, ähnlich oder konjugiert*, wenn $g = h \circ f \circ h^{-1}$ mit einer Affinität $h : \Gamma \rightarrow \Delta$.

◦

Da lineare Abbildungen affin sind ist, neben der Angabe erster Eigenschaften, zunächst zu klären, ob diese Definition mit derjenigen aus der linearen Algebra kompatibel ist.

6.17 Beobachtung.

(a) Seien in Definition 6.16 speziell $\Gamma = U, \Delta = W$ mit Untervektorräumen U, W und f, g linear. Dann sind f, g genau dann ähnlich (konjugiert), wenn sie als lineare Abbildungen ähnlich sind.

(b) Affine Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Seien $V = \Gamma, V' = \Gamma'$. Die linearen Abbildungen ähnlicher (konjugierter) affiner Abbildungen sind konjugiert.

◦

Wann ist eine affine Abbildung konjugiert zu einer linearen Abbildung?

6.18 Beobachtung.

Sei $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ affin.

Dann ist f genau dann konjugiert zu einer linearen Abbildung, wenn f einen Fixpunkt hat.

◦

Was passiert mit Punktmenge unter Affinitäten?

6.19 Definition.

Teilmengen M, N von affinen Unterräumen Γ, Δ heißen *affin äquivalent oder (verallgemeinert) ähnlich*, wenn $h(M) = N$ mit einer Affinität $h : \Gamma \rightarrow \Delta$.

◦

6.20 Beispiele

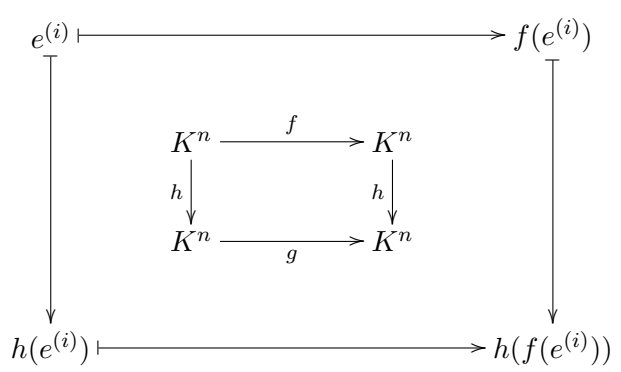
(a) Affin unabhängige Punktmenge mit gleich vielen Punkten sind affin äquivalent, insbesondere zwei nicht ausgeartete Dreiecke, Tetraeder, etc.

(b) Zwei affine Unterräume sind genau dann affin äquivalent, wenn sie die gleiche Dimension haben.

(c) Die Fixräume konjugierter affiner Abbildungen sind affin äquivalent.

Konjugation, affine Basiswechsel und Matrixdarstellung affiner Abbildungen.

Sei $h : K^n \rightarrow K^n$ eine Affinität und $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ die affine Standardbasis (mit $e^{(0)} = 0$). $h(e^{(0)}), h(e^{(1)}), \dots, h(e^{(n)})$ ist dann eine neue affine Basis von K^n . Man kann demnach Affinitäten auch einfach als affine Basiswechsel auffassen. Ist nun $f : K^n \rightarrow K^n$ eine affine Abbildung und g die mit h konjugierte Abbildung, also $g = h \circ f \circ h^{-1}$, dann ergibt sich ähnlich wie in der linearen Algebra folgender Zusammenhang:



Für die Matrixdarstellungen von f, g, h ergibt sich in diesem Kontext

6.21 Beobachtung.

Seien $f(x) = a + Ax$ und $h(x) = c + Px$ für alle x aus K^n . Dabei sind a, c aus K^n, A, P aus $K^{n \times n}$ und P invertierbar. Für die Abbildung g mit $g = h \circ f \circ h^{-1}$ ergibt sich dann die Matrixdarstellung

$$\boxed{g(y) = \underbrace{(c + Pa - PAP^{-1}c)}_{=: b} + \underbrace{PAP^{-1}}_{=: B} y \quad \text{für } y \in K^n.}$$

In kompakter Form bedeutet dies $g = T_b \circ \ell_B$ mit den angegebenen b, B . o

Für die Auswahl je eines Vertreters aus den Konjugationsklassen (Klassifikation) ist nun der Weg vorgezeichnet: Wähle zuerst P und dann c , derart dass B und b und damit g besonders schön oder einfach gebaut sind.

Ist erst einmal eine Wahl für P getroffen, dann ergibt sich die Wahl von c in vielen Fällen von selbst und ist auch ansonsten kein großes Problem mehr. Die Wahl von P beruht vollständig auf Ergebnissen aus der linearen Algebra u.A. zu Eigenwerten, Eigenvektoren, Eigenräumen, Invarianz. Sie werden bei dieser Gelegenheit soweit nötig wiederholt.

Die Ergebnisse für \mathbb{R}^2 sind in den folgenden beiden Sätzen zusammengefasst. Sie ergeben die so genannte Klassifizierung affiner Abbildungen in \mathbb{R}^2 . Satz 6.22 behandelt den Fall linearer Abbildungen und Satz 6.23 den Fall affiner Abbildungen.

6.22 Satz.: Eine „Ähnlichkeitsnormalform“ für lineare Abbildungen in \mathbb{R}^2 .

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann ist A ähnlich

- (i) entweder zu $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \leq \mu$,
- (ii) oder zu $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (iii) oder zu $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

Dabei tritt genau dann der Fall

- (i) ein, wenn A zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat,

- (ii) ein, wenn A nur einen Eigenwert und nicht zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat,
- (iii) ein, wenn A die beiden komplexen Eigenwerte $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ hat mit $\beta \neq 0$.

◦

Die zu A gehörende lineare Abbildung ℓ_A heißt im Fall

- (i)
 - *Euler-Affinität*, wenn $\lambda < \mu, \lambda \neq 1 \neq \mu$ und $\lambda\mu \neq 0$,
 - (*zentrische*) *Streckung*, wenn $\lambda = \mu \neq 1$ (echt wenn $\lambda \neq 0$),
 - *Parallelstreckung*, wenn $\lambda = 1, \mu > 1$ oder $\lambda < 1, \mu = 1$,
- (ii)
 - *Streckscherung*, wenn $\lambda \neq 1$ (echt wenn $\lambda \neq 0$),
 - *Scherung*, wenn $\lambda = 1$,
- (iii) *Drehstreckung* mit Streckungsfaktor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und $\cos(\text{Drehwinkel}) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

6.23 Satz.: Eine Normalform bezüglich Konjugation für affine Abbildungen in \mathbb{R}^2 .

Zu $a \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei $f_{a,A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung mit $f_{a,A}(x) = a + Ax$ für x aus \mathbb{R}^2 .

- (a) Wenn $\text{Fix}_{f_{a,A}} = \emptyset$, dann ist $f_{a,A}$ konjugiert
- (i) entweder zu $T_{e^{(1)}}$ (Translation),
 - (ii) oder zu $f_{e^{(1)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}$ mit $\lambda \neq 1$ (nicht-triviale Parallelstreckung mit Verschiebung),
 - (iii) oder zu $f_{e^{(2)}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ (Scherung mit Verschiebung, oder Schubscherung).
- (b) Wenn $\text{Fix}_{f_{a,A}} \neq \emptyset$, dann ist $f_{a,A}$ konjugiert zu einer linearen Abbildung und damit „erbt“ $f_{a,A}$ deren Eigenschaften gemäß Satz 6.22 und auch deren Namen.

Genau dann tritt der Fall

- (a)(i) ein, wenn $f_{a,A}$ bereits eine Translation ist.
- (a)(ii) ein, wenn $\ell_{f_{a,A}}$ den Eigenwert 1 und zusätzlich noch einen von 1 verschiedenen Eigenwert und keinen Fixpunkt hat.
- (a)(iii) ein, wenn $\ell_{f_{a,A}}$ nur 1 als Eigenwert hat, und keinen Fixpunkt.

◦

Die verschiedenen in 6.8, 6.9, 6.10, 6.22 und 6.23 vorkommenden Abbildungsarten nennen wir auch *affine Abbildungstypen*.

Wo tauchen bei all dem unsere zuvor eingeführten Streckungen, Projektionen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen auf?

- Bei Satz 6.22 liegt in (i) eine
 - echte Streckung vor, wenn $\lambda = \mu \neq 0$,
 - eine Projektion vor entlang $\langle e^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$ auf $\langle e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$, wenn $\lambda = 0, \mu = 1$ und die Nullabbildung, wenn $\lambda = \mu = 0$,
 - eine Spiegelung vor in Richtung $\langle e^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$ an $\langle e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$, wenn $\lambda = -1, \mu = 1$.

Gleitspiegelungen mit Fixpunkt sind Spiegelungen ($w \in U_2$ in 6.10).

- Bei Satz 6.23(a) kommen Streckungen, Projektionen und Spiegelungen nicht vor, denn sie besitzen ja alle Fixpunkte. Gleitspiegelungen ohne Fixpunkte ($w \notin U_2$ in 6.10) sind erfasst in 6.23(a)(ii) mit $\lambda = -1$.

Wie entscheide ich bei einer affinen Abbildung zu welchem Abbildungstyp sie gehört?

6.24 Beispiele

Gegeben sei zunächst eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = a + Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und durch } f \text{ bestimmten } a \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Ob Satz 6.23 Teil (b) und damit auch Satz 6.22 oder ob Satz 6.23 Teil (a) zur Anwendung kommen kann hängt davon ab, ob es Fixpunkte gibt oder nicht. Daher ist es nahe liegend zunächst nach Fixpunkten zu suchen. In einem zweiten Schritt muss die zu f gehörende lineare Abbildung eingeordnet werden können nach 6.22. Dazu müssen Eigenwerte und u.U. auch Eigenvektoren bestimmt werden. Es folgen mehrere Beispiele.

- (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: f hat genau einen Fixpunkt, da die die Matrix $A - E$ invertierbar ist und deswegen Gleichung $0 = f(x) - x = a + (A - E)x$ genau eine Lösung hat nämlich $\begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/2 \end{bmatrix}$. Sei dieser Fixpunkt mit p^* bezeichnet und sei $\tilde{f} = T_{-p^*} \circ f \circ T_{p^*}$. \tilde{f} ist linear, denn für alle x aus \mathbb{R}^2 gilt zunächst ganz allgemein nach vgl. 6.2(a)

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0) = \ell_{\tilde{f}}(x - 0) = \ell_{\tilde{f}}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Im vorliegenden Fall ist $\tilde{f}(0) = 0$ und man erhält⁽¹⁵⁾

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0) = \tilde{f}(x) = -p^* + a + A(x + p^*) = -p^* + \underbrace{(a + Ap^*)}_{=f(p^*)=p^*} + Ax = Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^2$$

und somit $\tilde{f} = \ell_{\tilde{f}} = \ell_A$.

Um nun den Abbildungstyp nach Satz 6.22 bestimmen zu können berechnen wir die Eigenwerte von A . Man erhält die Eigenwerte 4 und -1 als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $t^2 - 3t - 4$ von A .

Nach Satz 6.22 ist damit f bzw. \tilde{f} eine Euler-Affinität.

Um auch konkret eine Konjugation zu sehen, die f in \tilde{f} überführt, kann man Eigenvektoren berechnen zu den beiden verschiedenen Eigenwerten.

Man erhält $\text{Eig}_4(A) = \langle v^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\text{Eig}_{-1}(A) = \langle v^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Setzen wir $Q^{-1} = [v^{(1)} \quad v^{(2)}]$, dann ist $QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Die Diagonaleinträge sind noch

nicht der Größe nach aufsteigend geordnet. Setzen wir $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q$, dann ist allerdings

$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Stattdessen hätten wir auch von Anfang an die Spalten in Q^{-1} vertauschen können.

Zusammenfassung unserer Ergebnisse für f : Sei $h = \ell_P \circ T_{-p^*}$, dann ist

$$h \circ f \circ h^{-1} = \ell \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

⁽¹⁵⁾In der Vorlesung hatte ich u.A. \tilde{f} bezogen auf den Punkt p^* dargestellt, was natürlich auch möglich ist, aber nicht sehr geschickt, da ja p^* Fixpunkt von f und nicht von \tilde{f} ist. Das korrekte Ergebnis in diesem Fall ist:

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(p^*) = \ell_{\tilde{f}}(x - p^*) = \underbrace{(-p^* + a + A(x + p^*))}_{=\tilde{f}(x)} - \underbrace{(-p^* + a + A(p^* + p^*))}_{=\tilde{f}(p^*)} = A(x - p^*)$$

So oder so ergibt sich natürlich stets $\ell_{\tilde{f}} = \ell_A$, denn $\ell_{\tilde{f}}$ ist durch \tilde{f} eindeutig bestimmt.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(b), 6.22(iii),

(iii) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(a)(ii),

(iv) $A = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für den Fall 6.23(a)(iii). ◦

Eine Information über die Gesamtheit der Affinitäten in \mathbb{R}^2 :

6.25 Satz.

Eine Affinität in \mathbb{R}^2 kann durch drei (oder weniger) (Schräg-) Spiegelungen h_0, h_1, h_2 in die Form

$$h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ f = \ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

mit gebracht werden. (Setze $h_2 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ etc. bei Bedarf.) ◦

Der Beweis wird konstruktiv durch Angabe der notwendigen Spiegelungen geführt und kann in Aufgabe (19) in einem Beispiel nachvollzogen werden.

Kann man auch $\alpha = 1$ erreichen ?

6.26 Bemerkungen. zu affinen Abbildungen in \mathbb{R}^3 . ◦

6.27 Beispiel.

Eine Anwendung in den Bereichen Computergrafik und CAD: Szenengraphen. ◦

6.28 Beispiel.

3D-Betrachtungen eines 4D-Würfels oder allgemeiner: Würfelprojektionen in \mathbb{R}^n . ◦

§ 7 Bewegungen

Wir betrachten jetzt Affinitäten in \mathbb{R}^n unter Einbeziehung der Abstandsmessung.

Die Abstandsmessung in \mathbb{R}^n beruht auf einem Skalarprodukt. Deswegen muss an die dazu gehörenden Grundbegriffe aus der linearen Algebra erinnert werden:

Sei $((\cdot, \cdot)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, also eine reellwertige, symmetrische und positiv definite Bilinearform. Dann wird mit $d(x, y)$ der Abstand zwischen den Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ und mit $\|x\|$ die Länge des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet und es ist:

$$\|x\| := \sqrt{((x, x))} \quad \text{und} \quad d(x, y) := \|x - y\| = \|y - x\| .$$

Außerdem wird der Cosinus des zwischen zwei Halbstrahlen $(\mathbb{R}_{\geq}) \cdot x$ und $(\mathbb{R}_{\geq}) \cdot y$ eingeschlossenen Winkels eingeführt als

$$\cos \angle(x, y) := \frac{((x, y))}{\|x\| \cdot \|y\|} .$$

Er ist unabhängig von der Auswahl der von 0 verschiedenen Vektoren in $(\mathbb{R}_{>}) \cdot x$ und $(\mathbb{R}_{>}) \cdot y$. Diese Definition ist sinnvoll, denn es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Cauchy-Schwarz-sche Ungleichung, z.B. in der folgenden Form:

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq ((x, y)) \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Beispiele zur Wiederholung: Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n und das durch die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ erklärte Skalarprodukt mit } ((x, y)) = {}^t x A y \text{ für } x, y \text{ aus } \mathbb{R}^n. \text{ (Nachweis!)}$$

Im Folgenden ist $((\cdot, \cdot))$ fest gewählt und fast immer das Standardskalarprodukt.

7.1 Definition.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Bewegung, Isometrie oder Abstandstreu*, wenn

$$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$$

für alle x, y aus \mathbb{R}^n . ◦

7.2 Definition.

Eine Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *metrisch* oder *mit dem Skalarprodukt verträglich*, wenn

$$((\ell(x), \ell(y))) = ((x, y))$$

für alle x, y aus \mathbb{R}^n . ◦

7.3 Satz.

(a) Metrische Abbildungen sind linear.

(b) Für eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f \text{ Bewegung} \quad \Leftrightarrow \quad \ell_f \text{ metrisch}$$

(c) Bewegungen sind Affinitäten. ◦

Im Beweis dieses Satzes ergibt sich auch gleich noch Folgendes:

7.4 Beobachtung.

 Längentreue lineare Abbildungen sind metrisch.

Dabei heißt eine Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *längentreu*, wenn $\|\ell(x)\| = \|x\|$ für alle x aus \mathbb{R}^n . ◦

Nicht verwunderlich auf Grund der starken Anforderungen in den Definitionen 7.2 und 7.1 ist

7.5 Beobachtung. Bewegungen sind *winkeltreu* in folgendem Sinne:

Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung ist, dann gilt für alle a, x, y aus \mathbb{R}^n mit $x \neq a \neq y$:

$$\cos \angle(f(x) - f(a), f(y) - f(a)) = \cos \angle(x - a, y - a).$$

○

7.6 Beispiele und Gegenbeispiele.

(a) Translationen

(b) Schräg-Spiegelungen sind im Allgemeinen keine Bewegungen, orthogonale Spiegelungen schon. Eine Spiegelung ist orthogonal, wenn in 6.10(a) zusätzlich gilt: $U_1 \perp U_2$. Mehr dazu weiter unten.

Beispiel: $f = \ell_A$ mit $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. f ist eine Spiegelung aber keine Bewegung. f ist konjugiert zu einer Bewegung, allerdings ist dann der Basiswechsel nicht durch eine Bewegung bewerkstelligt.

(c) Drehungen: mehr dazu weiter unten.

○

7.7 Beobachtung. Seien f, g Bewegungen in \mathbb{R}^n .

(a) $f \circ g$ ist eine Bewegung.

(b) f^{-1} ist eine Bewegung.

○

Wie erkennt man eine Bewegung an ihrer Matrixdarstellung ?

7.8 Beobachtung. Matrixdarstellung einer Bewegung in \mathbb{R}^n .

Seien $f, \ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen und $((,))$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

(a) ℓ metrisch $\Leftrightarrow [\ell = \ell_A$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ${}^tAA = A{}^tA = E_n.$]

(b) f Bewegung $\Leftrightarrow [f = T_{f(0)} \circ \ell_A$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ${}^tAA = A{}^tA = E_n.$]

○

Spätestens an dieser Stelle muss an weitere

Begriffe und Schreibweisen aus der linearen Algebra zum Thema „orthogonal“ erinnert werden: x, y aus \mathbb{R}^n heißen orthogonal, wenn $((x, y)) = 0$. Schreibweise: $x \perp y$.

Für eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n ist $M^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : ((x, v)) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$.

Für zwei Teilmengen M, N von \mathbb{R}^n bedeutet $M \perp N$, dass $((u, w)) = 0$ für alle u aus M und alle w aus N . Eine Basis $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ von \mathbb{R}^n heißt orthogonal, wenn $((v^{(i)}, v^{(j)})) = 0$ für $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq n$. Sie heißt orthonormiert, wenn zusätzlich $\|v^{(i)}\| = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

Berechnung einer orthogonalen Basis aus einer Basis: „Gram-Schmidt-Verfahren“ und der Zusammenhang mit dem Berechnen von Projektionen.

Orthogonale oder besser: orthonormierte Matrizen und lineare Abbildungen.

7.9 Beispiel. Orthogonale Spiegelungen an einer Hyperebene.

Seien $\Gamma = a + U$ eine Hyperebene in \mathbb{R}^n ($a \in \mathbb{R}^n, U$ Untervektorraum von $\mathbb{R}^n, \dim_{\mathbb{R}} U = n - 1$) und $W := U^\perp$. Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$ und $a + U + W = \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $f_\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f_\Gamma(a + u + w) = a + u - w \quad \text{für } u \in U, w \in W$$

ist die (orthogonale) Spiegelung an der Hyperebene Γ . f_Γ ist eine Bewegung, denn für alle

u, u', w, w' aus U bzw. W gilt einerseits

$$\| f_{\Gamma}(a + u + w) - f_{\Gamma}(a + u' + w') \| = \| (a + u - w) - (a + u' - w') \| = \| (u - u') - (w - w') \| =: r$$

und andererseits

$$\| (a + u + w) - (a + u' + w') \| = \| (u - u') + (w - w') \| =: t .$$

Dabei ist $r = t$, denn $(u - u') \perp (w - w')$ und für orthogonale Vektoren v, v' gilt stets

$$\| v - v' \|^2 = \| v \|^2 - 2((v, v')) + \| v' \|^2 = \| v \|^2 + 2((v, v')) + \| v' \|^2 = \| v + v' \|^2 ,$$

da ja $((v, v'))$ den Wert 0 ergibt.

Wenn etwa $\langle u^* \rangle_{\mathbb{R}} = W = U^{\perp}$, dann erhält man nach einer kurzen Rechnung (Einsetzen von $a + u + \lambda u^*$ für x und Ausnutzen der Beziehung $((u^*, x - a)) = ((u^*, u + \lambda u^*)) = \lambda((u^*, u^*)) = \lambda \| u^* \|^2$) für alle x aus \mathbb{R}^n :

$$f_{\Gamma}(x) = x + \frac{2}{\| u^* \|^2} ((u^*, a - x)) \cdot u^* \quad (5)$$

(5) ist eine Normalenform der orthogonalen Spiegelung an Γ .

Die Matrixdarstellung von f_{Γ} (bezüglich der Standardbasis) erhalten wir ausgehend von der orthogonalen Elementarspiegelung \mathfrak{s}_n an der Hyperebene $\langle e^{(1)}, \dots, e^{(n-1)} \rangle_{\mathbb{R}}$. Sie hat die Matrixdarstellung $\mathfrak{s}_n = \ell_{S_n}$ mit $S_n =$

$$S_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Sei $(u^{(i)})_{1 \leq i \leq n-1}$ eine orthonormierte Basis der Richtung U von Γ , $u^{(n)} = \frac{1}{\| u^* \|} u^*$ und $A = [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}]$, dann gilt $A^{-1} = {}^t A$ und

$$B = AS_n {}^t A = E - 2u^{(n)} \cdot {}^t u^{(n)} = E - \frac{2}{\| u^* \|^2} u^* \cdot {}^t u^* . \quad (6)$$

Damit erhalten wir für f_{Γ} :

$$f_{\Gamma} = T_{f_{\Gamma}(0)} \circ \ell_B = T_a \circ \ell_B \circ T_{-a} \quad \text{oder} \quad f_{\Gamma}(x) = a + B(x - a) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n . \quad (7)$$

(6) gibt die Matrix von $\ell_{f_{\Gamma}}$ an bezüglich der Standardbasis und (7) ist die dazu gehörende Matrixdarstellung von f_{Γ} .

Die Matrizen in (6) heißen in der numerischen Mathematik *Householder-Matrizen* und an anderen Stellen auch *Matrizen von Cartan-Spiegelungen*.

Beachte: Auch f_{Γ}^{-1} ist eine Spiegelung und/denn es gilt $f_{\Gamma}^{-1} = f_{\Gamma}$. ◦

7.10 Beispiel. Bewegungen in \mathbb{R}^2

Wir betrachten wieder zuerst den Fall linearer Bewegungen ℓ_A mit einer orthonormierten Matrix A aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Für A gilt:

$${}^t A A = E_2 \Leftrightarrow A {}^t A = E_2 \Leftrightarrow$$

In Aufgabe (26) kann in einem Beispiel u.A. eine (lineare) Bewegung mit Determinante 1 als Produkt von drei elementaren Drehungen dargestellt werden. Die entsprechenden Drehwinkel sind mögliche Kandidaten für Eulersche Winkel. Ein schönes Applet zur Visualisierung einer häufig benutzten Variante Eulerscher Winkel finden sie dort:

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/mechanik/euler_winkel/

o

Insbesondere für höhere Dimensionen ist in Anwendungen ein ganz anderes Verfahren zur Darstellung von Bewegungen durch Spiegelungen wichtig. Es werden dabei nicht nur die elementaren Spiegelungen an Hyperebenen benutzt. Vorteil: Die Anzahl der benötigten Spiegelungen ist begrenzt durch die Dimension und nicht durch einen quadratisch wachsenden Term. Außerdem ist die Berechnung der benötigten Spiegelungen im Allgemeinen weit weniger aufwendig, als die Ermittlung der elementaren Spiegelungen nach Satz 7.12. Man vergleiche das folgende Ergebnis im Fall $n = 2$ auch mit Satz 6.25.

7.15 Satz. (erweitert)

Darstellung von Bewegungen durch Hyperebenenspiegelungen.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung und $\det \ell_f$ die Determinante der Matrix von ℓ_f (z.B. bezüglich der Standardbasis).

- (a) Wenn $f(0) = 0$, dann ist f die Hintereinanderausführung von höchstens $\left\{ \begin{array}{l} n-1, \text{ wenn } \det \ell_f = 1, \\ n, \text{ wenn } \det \ell_f = -1, \end{array} \right\}$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen durch 0.
- (b) Wenn $f(0) \neq 0$, dann benötigt man eine weitere orthogonale Spiegelungen an einer Hyperebene, die nicht durch 0 geht.
- (c) Eine Translation kann als Hintereinanderausführung zweier orthogonaler Spiegelungen an Hyperebenen dargestellt werden.

o

Die Ergebnisse in Satz 7.15 werden manchmal auch als **Satz von Cartan** bezeichnet.

7.16 Beispiel. Orthogonale Trigonalisierung und Darstellung von Bewegungen mit Hyperebenenspiegelungen.

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wir wenden Spiegelungen an, um die Spalten $a^{(1)}, \dots, a^{(4)}$ von A zu verändern. In einem ersten Schritt spiegeln wir orthogonal an der Hyperebene

$$(\| a^{(1)} \| \cdot e^{(1)} + a^{(1)})^\perp.$$

Die entsprechende Spiegelungsmatrix nach (6) sei mit B_1 bezeichnet. Man berechnet:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_1 = B_1 \cdot A = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 & \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 & \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{3} & -\frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \end{bmatrix}.$$

In zwei weiteren ähnlichen Schritten kann mit orthogonalen Spiegelungen im Unterraum $(\mathbb{R}e^{(1)})^\perp$ Trigonalisierung erreicht werden. Hinweise zu den weiteren Rechnungen in der Vorlesung, als Text und als Maple-Arbeitsblatt über die Vorlesungsseite im Internet.

Was besagt dies nun für Bewegungen? Wenn bei diesem Verfahren die gegebene 4×4 -Matrix A eine orthonormierte Matrix ist, dann ist zwangsläufig nach dem ersten Schritt der 1-1-Eintrag 1 und alle übrigen Einträge in der ersten Zeile und Spalte sind 0. Beim zweiten Schritt wird der 2-2-Eintrag 1 und alle übrigen Einträge in der zweiten Zeile und Spalte werden 0, analog beim dritten Schritt. Man erhält als Ergebnis der drei Schritte die Matrix $\text{diag}(1, 1, 1, \varepsilon)$, wobei $\varepsilon = \det A$, also entweder die Einheitsmatrix oder die Matrix der orthogonalen Spiegelung an der Hyperebene $\langle e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$. Insgesamt erhält man eine Darstellung von A als Produkt von drei oder vier Matrizen von Hyperebenen Spiegelungen je nach dem, ob $\det A = 1$ oder $\det A = -1$ zutrifft. Ein Beispiel hierzu ist in dem oben erwähnten Text und in dem dazu gehörenden Maple-Arbeitsblatt enthalten. ◦

Kongruenz

Der in §6 eingeführte Begriff „affine Äquivalenz“ führt zum Begriff der „Kongruenz“, wenn man nur Bewegungen zulässt.

7.17 Definition.

- (a) Zwei affine Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen *kongruent*, wenn $g = h \circ f \circ h^{-1}$ mit einer Bewegung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 - (b) Teilmengen M, N von \mathbb{R}^n heißen *kongruent*, wenn $h(M) = N$ mit einer Bewegung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
-

7.18 Satz. Die drei wichtigsten Kongruenzklassen.

Sei $n \geq 2$, f eine Bewegung in \mathbb{R}^n und a aus \mathbb{R}^n .

- (a) Genau dann ist f eine orthogonale Spiegelung an einer Hyperebene, wenn f kongruent ist zu $\ell_{\text{diag}(1,1,\dots,-1)}$.⁽¹⁶⁾
 - (b) Genau dann ist f eine Drehung um U^\perp in der Ebene U durch 0 mit a als Cosinus des Drehwinkels, wenn f kongruent ist zu $\ell_{D(1,2;a,b)}$.
 - (c) Wenn $f = h \circ \ell_{D(i,k;a,b)} \circ h^{-1}$ mit einer Bewegung h , dann ist f die Drehung in der Ebene $\langle h(e^{(i)}), h(e^{(k)}) \rangle_{\mathbb{R}}$ mit Fixraum $\langle e^{(j)} : 1 \leq j \leq n, i \neq j \neq k \rangle_{\mathbb{R}}$ und a als Cosinus des Drehwinkels.
 - (d) $\{h \circ T_a \circ h^{-1} : h \text{ Bewegung in } \mathbb{R}^n\} = \{T_b : b \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|b\| = \|a\|\}$.
-

7.19 Satz. Beispiel eines Kongruenzkriteriums.

Seien $a^{(0)}, \dots, a^{(n)}$ und $b^{(0)}, \dots, b^{(n)}$ zwei affine Basen in \mathbb{R}^n (Ecken eines Dreiecks, eines Tetraeders, eines Polytops (Simplex), wenn $n = 2, 3, \dots$).

Die Punktmenge

$$\{a^{(0)}, \dots, a^{(n)}\} \text{ und } \{b^{(0)}, \dots, b^{(n)}\}$$

sind genau dann kongruent, wenn

$$\|a^{(i)} - a^{(k)}\| = \|b^{(i)} - b^{(k)}\| \text{ für } 0 \leq i < k \leq n.$$
◦

Für Dreiecke und Tetraeder handelt es sich um gängige Kongruenzkriterien, die oft als *SSS* oder *SSSSSS* abgekürzt werden mit *S* für Seitenlänge. Ganz ähnlich erhält man weitere Kriterien, wie z.B. *SSW* oder *SSSWWW* mit *W* für Winkel.

Im Zusammenhang mit Satz 7.19 entsteht die **Frage nach dem Grad der Eindeutigkeit der Bewegung h , die die Kongruenz zweier Punktmenge herstellt.**

.....
⁽¹⁶⁾ = $S(i, n; 1, 0)$ für $1 \leq i \leq n - 1$.

7.20 Beobachtung.

(a) Seien M, N Teilmengen von \mathbb{R}^n und h, h' Bewegungen in \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$h(M) = N \text{ und } h'(M) = N \quad \Leftrightarrow \quad (h'^{-1} \circ h)(M) = M \text{ und } h(M) = N$$

(b) $\{h : h \text{ Bewegung in } \mathbb{R}^n \text{ und } h(M) = M\}$ ist eine Gruppe bezüglich „ \circ “.⁽¹⁷⁾ Sie heißt *Symmetriegruppe der Punktmenge M* und wird mit $\text{Sym}(M)$ bezeichnet. Außerdem sei $\text{Sym}_0(M) = \{h : h \text{ Bewegung in } \mathbb{R}^n \text{ und } h(M) = M\}$.

◦

7.21 Beispiele von Symmetriegruppen.

◦

7.22 Definition. absolutes Volumen

Das (*absolute*) *Volumen* des von den affin unabhängige Punkten $a^{(0)}, \dots, a^{(n)}$ in \mathbb{R}^n aufgespannten *Polytops* definieren wir als

$$V_n(a^{(0)}, \dots, a^{(n)}) := \frac{1}{n!} \left| \det [a^{(1)} - a^{(0)}, \dots, a^{(n)} - a^{(0)}] \right|$$

◦

7.23 Beispiele

◦

7.24 Bemerkung. Rekursivität des Volumens

Wenn speziell $a^{(0)} = 0$ und $a^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ b^{(i)} \end{bmatrix}$ für $1 \leq i \leq n-1$, und $a^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ b^{(n)} \end{bmatrix}$, dann erhält man

$$\begin{aligned} V_n(0, a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) &= \frac{1}{n!} \left| \det \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \\ b^{(1)} & \dots & b^{(n-1)} & b^{(n)} \end{bmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{n!} |\alpha| \left| \det [b^{(1)}, \dots, b^{(n-1)}] \right| \\ &= \frac{1}{n} |\alpha| V_{n-1}(0, b^{(1)}, \dots, b^{(n-1)}) \\ &= \frac{1}{n} \text{ mal Höhe } |\alpha| \text{ mal Grundvolumen/Fläche/Seite} \end{aligned}$$

◦

7.25 Beobachtung.

(a) Invarianz des Volumens unter Bewegungen.

(b) Verzerrungsfaktor unter einer Affinität.

◦

7.26 Definition.

Seien $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ affin unabhängige Punkte in \mathbb{R}^n , $n > r$, $w^{(r+1)}, \dots, w^{(n)}$ eine orthonormierte Basis von $(\langle a^{(0)}, \dots, a^{(r)} \rangle_{\mathbb{R}})^\perp$ und $A = [a^{(1)} - a^{(0)}, \dots, a^{(r)} - a^{(0)}]$, $W = [w^{(r+1)}, \dots, w^{(n)}]$. Dann sei

$$V_{r,n}(a^{(0)}, \dots, a^{(r)} - a^{(0)}) := \frac{1}{r!} |\det [A, W]|$$

das Volumen des Polytops mit den Ecken $a^{(0)}, \dots, a^{(r)}$ in \mathbb{R}^n .

◦

⁽¹⁷⁾ Untergruppe der Gruppe der Bewegungen in \mathbb{R}^n oder der Gruppe der bijektive Abbildungen von \mathbb{R}^n

7.27 Beobachtung.

Die vorangegangene Definition ist sinnvoll und kompatibel mit der Definition in 7.22.

◦

7.28 Beispiel.

◦

7.29 Bemerkung.

Zur Volumendefinition über eine Gram'sche Determinante und zu Anwendungen.

◦

Kapitel III Anfänge der projektiven analytischen Geometrie

§ 8 Vorbemerkungen, Fluchtpunkte

Einführung von Fluchtpunkten an einem Beispiel, Definition von Fluchtpunkten und des Horizonts.

§ 9 Einbettungen, Strahlenmengen und ihre Schnitte mit Hyperebenen

Einbettungen eines Vektorraumes in einen höherdimensionalen Vektorraum, Standardeinbettung von K^n in K^{n+1} , Strahlenmenge $U(M)$ zu einer Teilmenge M von K^{n+1} , Beispiele, affine Zentralprojektionen.

§ 10 Die projektiven Räume der analytischen Geometrie

Der projektive Standardraum $\mathbb{P}(V)$ zu einem Vektorraum, (projektive) Punkte, Unterräume, Dimension, projektive Ebenen und Hyperebenen, Projektivisierung, die zu einem projektiven Punktmenge \mathcal{P} gehörende Vektormenge $V(\mathcal{P})$, reelle projektive Räume $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$, Inzidenzverhalten von Punkten und Gerade in $\mathbb{P}(V)$ insbesondere im Falle einer projektiven Ebene, Bezug zu §3, Schnitt und Verbindung, Beispiele.

§ 11 Zum Wechselspiel „affin \leftrightarrow projektiv“

Illustration des Zusammenhanges zwischen affiner und projektiver Geometrie an Hand von zwei Themen:

- projektiver Satz von Desargues und affine Varianten
- Nullstellenmengen und Schnitte

§ 12 Projektive Geometrie hinter einem Programm für dynamische Geometrie

affine Punktwanderung als projektive Strahlenwanderung, Darstellung von Punkten und Geraden in der reellen projektiven Ebene durch Punktetripel, Standarddualität und Vektorprodukt, darauf basierende Inzidenztests und deren affine Interpretation, „Parallele zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt“ als Beispiel für die rechnerische Erfassung einfacher affiner Konstruktionen, „Schnitt zweier Kreise“ als Beispiel zu Kegelschnitten.