Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben 24.2.2011

(1) (i) Zunächst kann $\mathcal{E}$ in Parameterdarstellung angegeben werden:

$$\mathcal{E} = a + \langle b-a, c-a\rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

Die Aufgabenstellung sagt aus, dass es sich um eine Ebene handelt, was zutrifft, da $b-a$ und $c-a$ linear unabhängig sind, wie man leicht bestätigt, was aber nicht verlangt war. Mit einem von 0 verschiedenen Vektor v, der senkrecht auf $b-a$ und $c-a$ steht, gilt bereits $\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, 0) = \langle b-a, c-a\rangle_{\mathbb{R}}$. Setzt man nun noch $b = {}^{\mathsf{t}}va$, dann gilt $\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, b) = \mathcal{E}$. Letzteres kann so begründet werden:
$\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, b)$ ist ein affiner Unterraum, der a enthält. Somit ist $\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, b) = a + \mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, 0)$. Dabei ist aus Dimensionsgründen $\mathsf{Lös}\,({}^{\mathsf{t}}v, 0) = \langle b-a, c-a\rangle_{\mathbb{R}}$. Der Vektor v ist übrigens nur bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor bestimmt. Ein mögliches Ergebnis (siehe vorgegebenes Zwischenergebnis) ist $v = [2,1,2]$ und damit $b = {}^{\mathsf{t}}va = -1$. In diesem Fall ist dann $\mathcal{E} = \mathsf{Lös}\,([2,1,2], -1)$.

(ii) Der Vektor v aus (i) steht senkrecht auf $\mathcal{E}$. Für die gesuchte Gerade in Parameterform ergibt sich also einfach $\Gamma = d + \mathbb{R}v$.

(iii) Auch hier sind verschiedene Lösungswege möglich. Ein relativ kurzer verläuft wie folgt:
Wir wissen aus Vorlesung und Übung, dass ein kürzester Vektor in einer Ebene, die nicht durch 0 geht, senkrecht auf der Ebene steht und außerdem eindeutig bestimmt ist. Es kommt also nur der Schnittpunkt der Geraden $\mathbb{R}v$ mit der Ebene $\mathcal{E}$ in Frage. Dieser hat also die Form λv mit einem reellen λ und es muss für ihn gelten

$${}^{\mathsf{t}}v \cdot (\lambda v) = -1 \ .$$

Es folgt $\lambda = \frac{-1}{9}$. Der kürzeste Vektor in $\mathcal{E}$ ist also $\frac{-1}{9} \cdot v$.

(iv) Das absolute Volumen des Tetraeders mit den Ecken a, b, c, e und mit e aus Γ ist $\frac{1}{3!}\mathsf{det}\,[b-a, c-a, e-a]$. Ein Punkt e aus Γ hat die Darstellung $e = d + sv$ mit einem reellen s. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathsf{det}\,[b-a, c-a, e-a] &= \mathsf{det}\,[b-a, c-a, d+sv-a] \\ &= s \cdot \mathsf{det}\,[b-a, c-a, v] + \mathsf{det}\,[b-a, c-a, d-a] \\ &= s(-27) + (-27) \end{aligned}$$

Das gesuchte Volumen kann demnach nur 1 sein, wenn $s = \frac{7}{9}$ oder $s = \frac{11}{9}$. Dass mit diesen Werten auch tatsächlich das absolute Volumen den Wert 1 annimt, ermittelt man durch eine Probe.

(2) (i) Ich suche eine Matrix A aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, dass für alle x aus $\mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x) = f(a) + A(x-a) = a' + A(x-a) \ .$$

Insbesondere muss dann gelten:

$$b' = f(b) = a' + A(b-a) \ \text{ und } \ c' = f(c) = a' + A(c-a) \ .$$

In Matrixform besagt dies:

$$A[b-a, c-a] = [b'-a', c'-a'] \ .$$

Da $b-a$ und $c-a$ linear unabhängig sind, folgt

$$A = [b'-a', c'-a'] \cdot [b-a, c-a]^{-1} \ .$$

Ich berechne

$$[b-a, c-a]^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

und erhalte damit

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \ .$$

Mit dieser Matrix hat f die oben angegebene Darstellung. Man bestätigt dies, indem man mit der gewonnenen Darstellung $f(a), f(b)$ und $f(c)$ berechnet.

(ii) f ist eine Bewegung, denn für die Matrix A gilt $A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Matrix A ist also orthonormiert.
Alternative: Ergebnisse der Vorlesung über Bewegungen in $\mathbb{R}^2$ benutzen. A hat die Form $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$. Bestätige, dass außerdem $a^2+b^2=1$, dann ist A die Matrix einer Bewegung.
Aufwendigere Alternative: $\| f(x) - f(y) \|$ mit $\| x - y \|$ vergleichen für x, y aus $\mathbb{R}^2$.

(iii) Die Spiegelungsrichtung wird erzeugt von einem Vektor $\ell_f(x) - x$ mit einem Vektor x, der kein Fixpunkt von ℓ_f ist, also etwa von $e^{(1)}$, dem ersten Standardbasisvektor. Mit ihm erhält man: $\ell_f(e^{(1)}) - e^{(1)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Die Spiegelungsrichtung ist also $\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.
Geringfügig aufwendigere Alternative: Eigenvektor für A zum Eigenwert -1 bestimmen.

(iv) Für einen Fixpunkt x muss gelten: $f(x) = x$, oder ausführlicher $a' + A(x-a) = x$, oder umgeordnet: $(A-E)x = Aa - a'$. Man stellt nun leicht fest, dass dieses lineare Gleichungssystem für x keine Lösung besitzt. f hat demnach keine Fixpunkte.

(3) (i) Sei f eine Affinität in $\mathbb{R}^2$ und etwa $x = \lambda a + \mu b + \nu c$ mit reellen λ, μ, ν und mit $\lambda + \mu + \nu = 1$ und $\lambda, \mu, \nu > 0$. Auf Grund der Affinität von f gilt dann

$$f(x) = \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f(c).$$

Somit liegt f inmitten von $f(a), f(b), f(c)$.

(ii) Gelte $x = \lambda a + \mu b + \nu c$ und $x' = \lambda' a + \mu' b + \nu' c$ mit reellen $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ und mit $\lambda + \mu + \nu = 1 = \lambda' + \mu' + \nu'$ und $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu' > 0$. Dann gilt für den Mittelpunkt von x und x':

$$\frac{1}{2}(x + x') = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')a + \frac{1}{2}(\mu + \mu')b + \frac{1}{2}(\nu + \nu')c \ .$$

Dabei sind alle Koeffizienten auf der rechten Seite positiv und deren Summe ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')+\frac{1}{2}(\mu+\mu')+\frac{1}{2}(\nu+\nu') &= \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')a+\frac{1}{2}(\mu+\mu')b+\frac{1}{2}(\nu+\nu') \\ &= \frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu)+\frac{1}{2}(\lambda'+\mu'+\nu') \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\ .\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt von x und x' liegt also ebenfalls inmitten von a, b, c.

(4) Begründungen waren nicht verlangt. Die hier wiedergegebenen Begründungen sind nicht die einzig möglichen!

(i) $\boxed{\text{richtig}}$, denn die Abbildung f mit der Abbildungsvorschrift $f(x) = a$ für alle x aus $\mathbb{R}^2$ ist affin mit der Nullabbildung als zugehöriger linearer Abbildung.

(ii) $\boxed{\text{richtig}}$, denn a, b, c sind affin unabhängig und deswegen ist z.B. durch die Vorgaben $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = b$ eine affine Abbildung festgelegt, bei der gilt:

$$\| f(c) - f(b) \| = 0 \neq \| b - c \| \ .$$

(iii) $\boxed{\text{falsch}}$, denn zunächst sind a, b, c drei affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^2$ und deswegen hat d eine Darstellung als Affinkombination wie folgt:

$$d = \lambda a + \mu b + \nu c \ \text{ mit reellen } \lambda, \mu, \nu \text{ und } \ \lambda + \mu + \nu = 1\ .$$

Für eine affine Abbildung aus $\mathfrak{A}$ ergibt sich damit

$$f(d) = \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f(c)\ .$$

Wenn dabei nun $f(a), f(b), f(c)$ affin unabhängig sind, dann sind Darstellungen als Affinkombinationen der Punkte $f(a), f(b), f(c)$ eindeutig und es kann nicht $f(d) = f(c)$ gelten.

(iv) $\boxed{\text{richtig}}$, denn ein Punkt x aus $a \vee b$ lässt sich als Affinkombination von a und b darstellen, etwa als $x = \lambda a + \mu b$ mit reellen λ, μ und $\lambda + \mu = 1$. Wenn nun $f(a) = a$ und $f(b) = b$ mit einer affinen Abbildung f aus $\mathfrak{A}$, dann folgt sofort auch $f(x) = \lambda f(a) + \mu f(b) = x$.

(v) $\boxed{\text{richtig}}$. Nehmen wir an, dass die Ecken des Quadrats entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufend mit a, b, c, d bezeichnet sind. Dann gilt: $d = a + (b - a) + (c - a) = b + c - a$. Dies ist eine Affinkombination der Punkte a, b, c. Mit einer affinen Abbildung aus $\mathfrak{A}$ erhält man dann $f(d) = f(b) + f(c) - f(a)$ bzw. $f(d) - f(c) = f(b) - f(a)$. Die (unter Umständen zu Punkten degenerierten) affinen Unterräume $f(a) \vee f(b)$ und $f(c) \vee f(d)$ sind also parallel.

(5) (i) Die beiden Geraden sind windschief, z.B. weil $\mathsf{Rang}\,[u, u', a' - a] = 3$, oder weil die beiden Geraden keinen Schnittpunkt haben und zugleich die erzeugenden Vektoren u und u' ihrer Richtungen linear unabhängig sind. Beides kann in kurzen Rechnungen ermittelt werden.

(ii) Das Bild auf $\mathcal{B}$ der Geraden Γ unter Zentralprojektion mit Zentrum 0 erhält man durch Berechnung des Schnittes $\mathcal{B} \cap \big(0 \vee \Gamma\big)$, das von Γ' entsprechend durch Berechnung von $\mathcal{B} \cap \big(0 \vee \Gamma'\big)$. Da Γ und Γ' windschief sind, müssen sich die beiden Ebenen $\mathcal{B} \cap \big(0 \vee \Gamma\big)$ und $\mathcal{B} \cap \big(0 \vee \Gamma'\big)$ in einer Geraden schneiden. Deren Schnittpunkt dieser Geraden mit $\mathcal{B}$ ist dann der gesuchte Schnittpunkt der Bildgeraden. Um die Fragestellung des Aufgabenteils (ii) zu beantworten, ist also letztlich nur zu klären, ob $\mathcal{B} \cap \big(0 \vee \Gamma\big) \cap \big(0 \vee \Gamma'\big)$ ein Punkt ist.

Schnittgeraden von Ebenen in $\mathbb{R}^3$ sind i.A. am leichtesten zu bestimmen, wenn die Ebenen in Form von Lösungsmengen jeweils einer linearen Gleichung vorliegen. Diese Darstellung der hier interessierenden Ebenen $\big(0 \vee \Gamma\big)$ und $\big(0 \vee \Gamma\big)'$ kann mit bloßem Auge abgelesen werden: Zunächst einmal ist

$$\big(0 \vee \Gamma\big) = \langle a, u \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \big(0 \vee \Gamma'\big) = \langle a', u' \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$ sind jeweils orthogonal zu den zweidimensionalen Untervektorräumen $0 \vee \Gamma$ und $0 \vee \Gamma'$ und man erhält

$$\big(0 \vee \Gamma\big) = \ \mathsf{Lös}\,([1, -1, 0], 0) \quad \text{und} \quad \big(0 \vee \Gamma'\big) = \ \mathsf{Lös}\,([10, 10, -1], 0)$$

und damit wiederum

$$\big(0 \vee \Gamma\big) \cap \big(0 \vee \Gamma'\big) = \ \mathsf{Lös}\,(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10 & 10 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

Da der dritte Eintrag des Richtungsvektors dieser Schnittgeraden nicht 0 ist, liegt ein Schnittpunkt mit $\mathcal{B}$ vor. Die Bestimmung dieses Schnittpunktes war nicht verlangt.

(iii) Um eine geeignete Ebene zu finden ist anschaulich gesprochen der eben betrachtete Schnittpunkt in $\mathcal{B}$ „ins Unendliche zu verlagern“ durch Veränderung der Lage von $\mathcal{B}$. Da ein Stützvektor (etwa mit c bezeichnet) und ein Richtungsvektor (etwa mit v bezeichnet) bereits vorgeschrieben sind, bleibt nur noch ein weiterer Richtungsvektor w zu bestimmen, der zusammen mit dem gegebene eine Ebene erzeugt.

Ich setze $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}$ und $\mathcal{E} = a + \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}$, denn dann ist $\mathcal{E}$ parallel zu $\langle w \rangle_{\mathbb{R}}$.

Ein Schnittpunkt der Bilder von Γ und Γ' in $\mathcal{E}$ kann daher nicht mehr vorkommen.

<u>Behauptung:</u> Für den Schnitt der Bilder $\mathcal{E} \cap \big(0 \vee \Gamma\big)$ und $\mathcal{E} \cap \big(0 \vee \Gamma'\big)$ von Γ und Γ' in der Ebene $\mathcal{E}$ gilt

$$\mathcal{E} \cap \big(0 \vee \Gamma\big) \cap \big(0 \vee \Gamma'\big) = \varnothing \ .$$

$\mathcal{E} \cap \big(0 \vee \Gamma\big)$ und $\mathcal{E} \cap \big(0 \vee \Gamma'\big)$ sind also parallel.

Die Behauptung war dann noch zu bestätigen mit Hilfe der gegebenen Daten.